

Tartalomjegyzék

Bevezetés	9
1. Számтан, algebra	12
1.1. A természetes számfogalom alakítása (<i>Herendiné Kónya Eszter</i>)	12
1.1.1. Több, kevesebb, ugyanannyi	12
1.1.2. A természetes szám mint darabszám	15
1.1.3. A számok jelölése és a számírás	16
1.1.4. Sorszám, jelzőszám, mérőszám	17
1.1.5. A helyi értékes rendszer és a számrendszeres írásmód	19
1.1.6. A számegyenes	22
1.1.7. Számszomszédok és kerekített értékek	24
1.2. A természetes számokkal végezhető műveletek bevezetése (<i>Bontovics Ignác</i>)	27
1.2.1. Az összeadás értelmezése	28
1.2.2. A kivonás értelmezése	31
1.2.3. A szorzás értelmezése	34
1.2.4. Az osztás értelmezése	37
1.3. Számolási eljárások (<i>Bontovics Ignác</i>)	40
1.3.1. Szóbeli összeadás	40
1.3.2. Szóbeli kivonás	48
1.3.3. A szóbeli szorzás	51
1.3.4. A szóbeli osztás	54
1.3.5. Írásbeli műveletek tanítása	55
1.3.6. Írásbeli összeadás	56
1.3.7. Írásbeli kivonás	60
1.3.8. Írásbeli szorzás egyjegyű és kétjegyű szorzóval	63
1.3.9. Írásbeli osztás egyjegyű és kétjegyű osztóval	69
1.4. A műveletek kapcsolata, műveleti tulajdonságok (<i>Bontovics Ignác</i>)	74
1.4.1. Az összeadás és a kivonás tulajdonságai	74
1.4.2. A szorzás és az osztás tulajdonságai	79

1.4.3. Műveletek sorrendje.....	82
1.4.4. Műveletek kapcsolata.....	84
1.5. A természetes számok egyszerűbb számelméleti tulajdonságai (<i>Herendiné Kónya Eszter</i>)	88
1.5.1. Paritás.....	88
1.5.2. Osztók, többszörösök, maradékok	89
1.5.3. Elemi oszthatósági szabályok	94
1.6. A természetes számfogalom bővítése: az egész számfogalom alakítása (<i>Török Tamás</i>)	95
1.6.1. A negatív számok bevezetése.....	97
1.6.2. Egész számok rendezése	106
1.6.3. Az összeadás és a kivonás előkészítése az egész számkörben	107
1.7. A természetes szám fogalmának bővítése: a racionális szám fogalmának alakítása (<i>Török Tamás</i>)	110
1.7.1. Törtrészek és törtszámok egymáshoz rendelése	110
1.7.2. Törtek összehasonlítása, rendezése.....	120
1.7.3. Mennyiségek és számok törtrészeinek meghatározása művelettel.....	123
1.7.4. Következtetés törtreszről egészre	125
2. Halmazok, logika	128
2.1. A halmazok és a logika szerepe az iskolai matematikai tevékenységben (<i>Köves Gabriella</i>)	128
2.1.1. A logikai ismeretek tanítása, állítások vizsgálata	130
2.1.2. A halmaz fogalma, jelölése, szemléltetése.....	136
2.1.3. Válogatások egy szempont szerint.....	137
2.1.4. Válogatások több szempont szerint	140
2.1.5. A válogatásokhoz kapcsolódó feladatok típusai	149
2.2. Nyitott mondatok (<i>Török Tamás</i>)	152
2.2.1. A nyitott mondat fogalmi kialakítása.....	153
2.2.2. Egy ismeretlent tartalmazó nyitott mondatok és megoldási módszereik	156
2.2.3. Két ismeretlent tartalmazó nyitott mondat megoldása táblázattal ..	163
2.3. Szöveges feladatok és tanításuk (<i>Török Tamás</i>).....	164
2.3.1. A szöveges feladat fogalma és szerepe a tanításban	165
2.3.2. Szöveges feladatok rendszerezése	166
2.3.3. A szöveges feladatok órai feldolgozásának általános lépései ..	171

3. Geometria, mérések	192
3.1. Testek (<i>Szilágyiné Szinger Ibolya</i>)	195
3.1.1. A testfogalom kialakítása.....	195
3.1.2. A síklapú test fogalmának kialakítása. Testhálók	197
3.1.3. Testek tulajdonságai, jellemzése. Nézeti képek	201
3.1.4. Speciális testek. A kocka és a téglatest	204
3.2. Síkidomok (<i>Szilágyiné Szinger Ibolya</i>)	206
3.2.1. A síkidom fogalmának kialakítása	206
3.2.2. A sokszög fogalmának kialakítása	209
3.2.3. Síkidomok, sokszögek tulajdonságai, jellemzése	214
3.2.4. Speciális sokszögek. A négyzet és a téglalap.....	217
3.3. Geometriai transzformációk (<i>Szilágyiné Szinger Ibolya</i>).....	219
3.3.1. Egybevágósági transzformációk	219
3.3.2. Hasonlósági és affin transzformációk	230
3.4. Tájékozódás térben, síkban, vonalon (<i>Herendiné Kónya Eszter</i>)	234
3.4.1. Térbeli viszonzszavak.....	234
3.4.2. Tájékozódás a síkban	238
3.4.3. Tájékozódás vonalon	239
3.5. A mérés tanítás általános szempontjai (<i>Herendiné Kónya Eszter</i>)	240
3.5.1. Mértékegység nélküli összehasonlítások, összemérések	240
3.5.2. A mérés fogalma, mérési tapasztalatok.....	243
3.5.3. A becslés szerepe	245
3.5.4. Alkalmi és szabványmértékegységek	247
3.6. A hosszúság, tömeg, űrtartalom és idő mérése (<i>Herendiné Kónya Eszter</i>)	249
3.6.1. Hosszúságmérés.....	249
3.6.2. Tömegmérés.....	251
3.6.3. Űrtartalommérés	252
3.6.4. Időmérés.....	253
3.6.5. Mértékegységek átváltása	257
3.7. Geometriai alakzatok mérhető tulajdonságai (<i>Herendiné Kónya Eszter</i>)	259
3.7.1. A terület.....	259
3.7.2. A terület.....	263
3.7.3. A felszín	266
3.7.4. A térfogat	267
3.7.5. A szög.....	268

4. Kombinatorika, statisztika, valószínűség	271
4.1. Kombinatorika (<i>Pintér Klára</i>).....	271
4.1.1. Az esetek megkülönböztetése	273
4.1.2. Az összes eset felsorolása ötletszerűen	275
4.1.3. Rendszeres felsorolás	276
4.1.4. Formális módszerek alkalmazásának előkészítése	278
4.1.5. Példák különböző kombinatorikai struktúrákra	284
4.1.6. Gráfok	290
4.2. A statisztika tanítása (<i>Szitányi Judit</i>).....	292
4.2.1. Adatok gyűjtése, rendezése. Diagramkészítés.	293
4.2.2. Az átlag kiszámítása	301
4.3. A valószínűségi szemlélet alapozása (<i>Szitányi Judit</i>)	303
4.3.1. Biztos és lehetetlen	305
5. Relációk, függvények, sorozatok	316
5.1. Relációk tanítása (<i>Petz Tiborné</i>)	318
5.1.1. Egyszerű konkrét kapcsolatok megismerése, kifejezése tevékenységgel, rajzzal, szóban, összetartozó elemek felsorolásával	319
5.1.2. Szavakkal vagy formulával adott relációk kifejezése a megfelelő elemek összekapcsolásával	320
5.1.3. Elempárokkal adott relációk felismerése, a felismert általános összefüggés kifejezése	327
5.2. Függvények tanítása (<i>Petz Tiborné</i>)	330
5.2.1. Egyszerű konkrét függvénykapcsolatok kifejezése tevékenységgel, rajzzal, szóban, összetartozó elemek felsorolásával	331
5.2.2. Szavakkal vagy formulával adott függvénykapcsolat (hozzárendelési szabály) kifejezése a megfelelő elemek összekapcsolásával	333
5.2.3. Elempárokkal megadott függvénykapcsolat felismerése, a felismert hozzárendelési szabály kifejezése	337
5.2.4. Függvényre vezető szöveges feladatok	340
5.3. Sorozatok tanítása (<i>Petz Tiborné</i>)	342
5.3.1. Sorozatok osztályozása	342
5.3.2. Sorozatok tulajdonságai	345
5.3.3. Összefüggés keresése sorozat tagjai között	347
Irodalom	353

BEVEZETÉS

A matematika tanítása az alsó tagozaton c. felsőoktatási tankönyv a tanító szakos hallgatók matematika tantárgy-pedagógia c. tantárgyához készült.

A tankönyv az általános iskola 1–4. évfolyamának matematika-tananyagát és az ehhez kapcsolódó alapvető módszertani ismereteket tartalmazza tömör, tanulható és számon kérhető formában.

Felfogásunk szerint a matematika tantárgy-pedagógia hídszerepet tölt be a tanító szakos hallgatók képzésében. Az elméleti matematikai ismeretek és az alsó tagozaton tanítandó ismeretek közötti összefüggéseket vizsgálja.

A tananyagot két fő kérdés (Mit? Hogyan?) köré csoportosítva tárgyaljuk.

A *Mit tanítsunk?* kérdésre a pontos választ a mindenkori Nemzeti alaptanterv és a hozzá kapcsolódó akkreditált kerettantervek adják meg. Napjaink matematika-tananyaga hosszú tanítástörténeti folyamat eredményeként alakult ki, s jelenleg is változik, módosul. Az érvényben lévő alsó tagozatos tantervek struktúrájának és meghatározó tartalmi vonásainak gyökereit az 1978-as, Varga Tamás nevével fémjelzett komplex matematika-tantervben találjuk meg. Ebben a tantervben szerepelt a tantárgy neve már alsó tagozaton is *matematikaként* a korábbi *számтан-mértan* helyett, s ekkor jelent meg a matematika-tananyag öt nagy témakör szerinti csoportosítása minden évfolyamon. Ezt a témakörök szerinti felosztást követik a jelenlegi tantervek és tankönyvek is, igaz, azóta történtek kisebb változtatások a témakörök elnevezésében vagy esetleg egy-egy résztémakör besorolásában.

Tankönyvünk a klasszikusnak számító felosztást követi, így a matematika tantárgy-pedagógiai tananyagot öt nagy témakörbe sorolva tárgyaljuk:

1. Számтан, algebra
2. Halmazok, logika
3. Geometria, mérések
4. Kombinatorika, valószínűség, statisztika
5. Relációk, függvények, sorozatok

Az egyes témakörök tanítása természetesen eltérő terjedelmű. Alsó tagozaton a *Számтан, algebra* témakör szerepe a meghatározó, a tanítási anyag

közel 70%-a ide sorolható. Ezt követi a *Geometria, mérések* témakör. Ennek terjedelme az évfolyamokkal egyre nő. A másik három témakörrel gyakran mondjuk, hogy ezeket nem önállóan tanítjuk, hanem a legtöbb esetben az előző kettőbe beépítve. Természetesen a teljes alsó tagozatos tananyagra igaz az, hogy a spirális tárgyalásmódot követve, integráltan tanítjuk, törekszünk arra, hogy egy-egy feladat egyszerre két vagy akár több témakörhöz is kapcsolódjon.

Az egyes fejezetekben a tanítandó anyagot időrendben, lehetőleg évfolyamokhoz kötődően mutatjuk be. Ez elsősorban a *Számтан, algebra* témakörben valósítható meg. A fejezetek természetéből adódóan az évfolyamonkénti besorolás nem minden esetben (például *Halmazok, Kombinatorika, Valószínűség*) lehetséges, de a tárgyalásmód itt is követi az időrendi sorrendet.

A *Hogyan tanítsunk?* kérdésre az alapvető módszertani összefüggések, kapcsolódási pontok bemutatásával keressük a választ. Ismertetjük egy-egy témakörön belül a tanítási fokozatokat, foglalkozunk a matematikai munkaeszközök alkalmazásával, példák elemzésén keresztül rávilágítunk a tipikus tanulói, tanítói hibákra.

Fontosnak tartjuk hangsúlyozni azt, hogy tankönyvünk megtanulásával a tanítói felkészültségnek csak egy része szerezhető meg. Ehhez további ismeretek, gyakorlati tapasztalatok szükségesek. Mindenekelőtt elengedhetetlen a biztos matematikai háttértudás. Az alsó tagozatos tananyaghoz kötődő elméleti matematikai ismeretek bemutatására sem terjedelmi, sem tárgyalástechnikai okok miatt nem vállalkoztunk. Ezek az ismeretek különböző tankönyvekből szerezhetők meg, elsősorban a *Matematika az általános képzéshez a tanító szak számára* (szerk.: Pappné Ádám Györgyi, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006) című felsőoktatási tankönyvet ajánljuk.

Igen fontosnak tartjuk a matematikai munkaeszközök használatát a tanítás során. A klasszikus munkaeszközöket (színesrúd-készlet, logikai készlet stb.) egy-egy mintafeladathoz kapcsolódva röviden bemutatjuk, részletesebb leírást és további felhasználási lehetőségeket a szakirodalomban találhat az olvasó. Elengedhetetlen az alsó tagozatos tankönyvek, munkafüzetek, feladatgyűjtemények tanulmányozása is. Tankönyvünk elsődlegesen a tanító szakos hallgatóknak szól, nem célja, hogy részletesen ismertesse azt a szóhasználatot, amelyet egy-egy tanítási órán a tanítónak használnia kell. Erre vonatkozó ismereteket az egyes tankönyvcsaládokhoz készült tanítói kézikönyvekből, kiadott óravázlatokból, óravázlatrészletekből szerezhet az érdeklődő olvasó.

Nyomatékosan hangsúlyozzuk, hogy a tankönyv nem helyettesíti sem a tantárgy-pedagógiai kurzusok látogatását, sem az iskolai óralátogatásokon szerzett tapasztalatokat.

Felfogásunk szerint tehát a tanítói felkészültség több összetevőből áll, melyek közül tankönyvünk csupán az egyik. Ezek az összetevők: elméleti matematikai ismeretek, tantárgy-pedagógiai ismeretek (kurzuslátogatás, tankönyv), alsó tagozatos tankönyvcsaládok (benne tanítói kézikönyvek), munkaeszközök ismerete, óralátogatások és a hallgatók önállóságát fokozatosan növelő gyakorló tanítások.

1. Számtan, algebra

1.1. A természetes számfogalom alakítása

Az általános iskolai matematika tanítását a természetes szám fogalmának alakításával kezdjük.

Az 1. évfolyamot kezdő tanulók a mindennapi élet különböző szituációiban már találkoztak számokkal, számnevekkel. A számnevek ismerete önmagában még nem jelenti a számfogalom meglétét, de a hétköznapi és az óvodai tapasztalatok jó kiindulópontot jelentenek ahhoz, hogy összegyűjtve és rendszerezve ezeket, megkezdjük a számfogalom tudatos kialakítását.

Ahhoz, hogy a számfogalom minél szélesebb körű absztrakció eredménye legyen, át kell gondolnunk, hogy melyek azok a mindennapi szituációk, amelyekben számokkal találkozunk. Ennek megfelelően a természetes számot darabszámként, sorszámként és mérőszámként egyaránt értelmezzük. Megemlítünk olyan helyzeteket is, amelyekben a számoknak nem tulajdonítunk matematikai jelentést, csupán objektumok megkülönböztetésére használjuk őket.

A fogalomalakítás folyamata természetesen nem fejeződik be az 1. évfolyamon, a számfogalom folyamatosan bővül, árnyaltabbá válik a következő évek során, köszönhetően a számkör (lineáris és strukturális) bővítésének és a műveletek megismerésének.

1.1.1. Több, kevesebb, ugyanannyi

A természetes számfogalom értelmezésénél véges halmazokból indulunk ki.

Két halmazt egyenlő számosságúnak mondunk, ha közöttük kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ennek a definíciónak megfelelően először olyan feladatokat tűzünk ki, amelyekben két halmazról el kell dönteni, hogy ugyanannyi elemet tartalmaznak-e vagy sem. Ezt a tanulók úgy döntenek el, hogy az elemeket páronként megfeleltetik egymásnak, azaz elvégzik a kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést. A párosítás eredményeként két eset fordulhat elő:

- A két halmaz elemeit párba tudjuk állítani. Ekkor azt mondjuk, hogy a két halmazban *ugyanannyi elem* van.
- Az egyik halmazban van legalább egy olyan elem, amelynek nincs párja. Ekkor azt mondjuk, hogy ez a halmaz több elemet tartalmaz (másik halmazban *kevesebb elem* van).

A *több*, *kevesebb*, *ugyanannyi* relációk jelölésére bevezetjük a $>$, $<$, $=$ ún. relációjeleket.

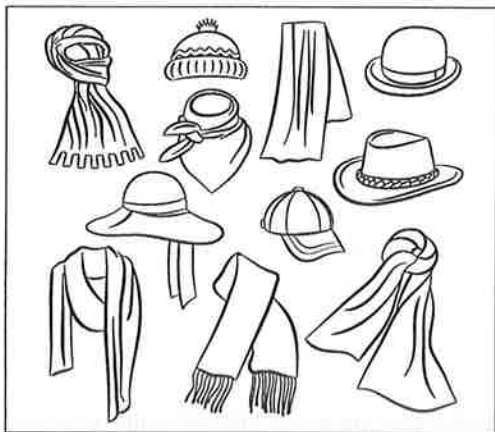
1. példa

Miből van több a képen, sálakból vagy sapkákból? Párosíts! (1.1. ábra)

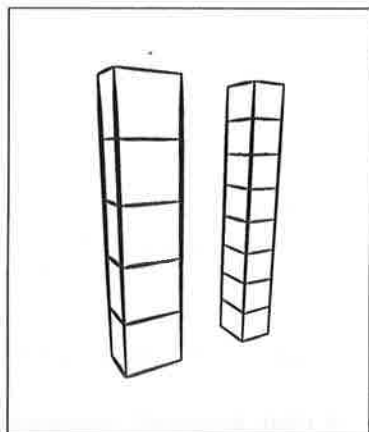
Célszerű olyan halmazokat is összehasonlíttatni, amelyek közül az egyikben viszonylag nagy kiterjedésű, de kevés elem van, míg a másikban kisebb kiterjedésű tárgyakból van több, ezzel is hangsúlyozva, hogy az összehasonlításnál most csak a halmazok elemszámára koncentrálnunk.

2. példa

Színezd ki azt a tornyot, amelyik több kockából épült! (1.2. ábra)



1.1. ábra



1.2. ábra

Kevesebb (5-nél nem több) elemszámú vagy nagyon eltérő számosságú halmazok esetén a párosítás elvégzése nélkül, ránézésre is meg kell tudni állapítani, hogy melyik halmazban van több (kevesebb) elem.

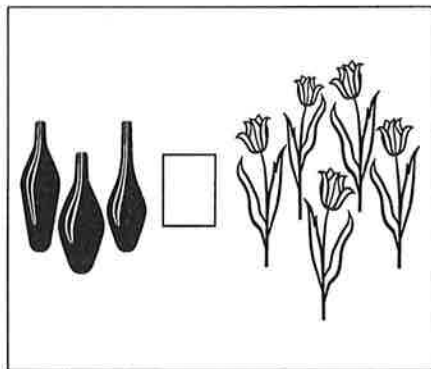
3. példa

Több, kevesebb, ugyanannyi? Tedd ki a megfelelő jelet! (1.3. ábra)

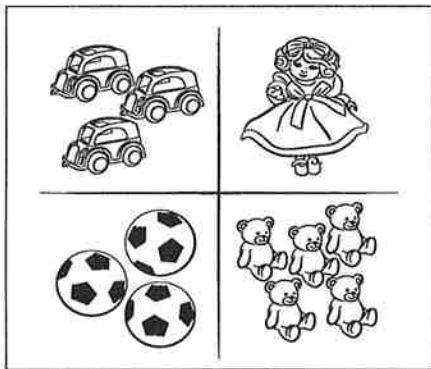
Nehezebb a feladat, ha nem 2, hanem 3, esetleg 4 halmaz számosságát kell összehasonlítani.

4. példa

Mutasson a nyíl a kevesebb felé! (1.4. ábra)



1.3. ábra



1.4. ábra

Megjegyzések:

- A több, kevesebb, ugyanannyi relációk eldöntéséhez még nincs szükség számfogalomra. Ezeknél a feladatoknál a tanulók nem számokat hasonlítanak össze, hanem halmazokat.
- Ha kettőnél több halmaz számosságát hasonlítjuk össze, akkor a reláció jelölésére a relációjelek helyett célszerűbb nyilakat használni. Négyénél több halmaz összehasonlítását ne kérjük, mert a berajzolandó nyilak nagy száma áttekinthetetlenné teszi a megoldást.

A több, kevesebb, ugyanannyi relációkra alapozva elkezdhetjük a számfogalom alakítását.

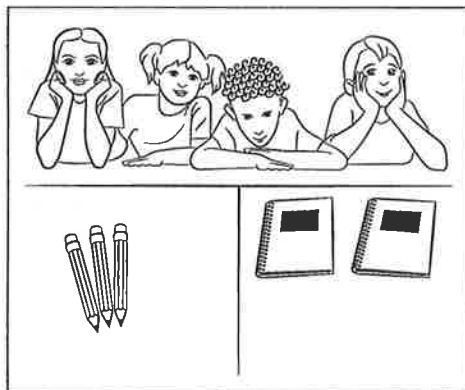
A természetes számok megismerését nagyon részletesen, körültekintően kezdjük. Nullától tízig a számok tanítását egyesével, hasonló algoritmus szerint végezzük. Ez a folyamat az 1. évfolyam 1. félévére esik.

1.1.2. A természetes szám mint darabszám

Egy konkrét természetes szám bevezetését különböző véges (általában azonos elemszámú) halmazok számosságának vizsgálatával kezdjük. Feltesszük például azt a kérdést, hogy mi a közös a 4 almát, 4 ceruzát, 4 gyereket, 4 virágot tartalmazó halmazokban. Igyekszünk úgy megválasztani a halmazokat, hogy azoknak az azonos elemszámon kívül más közös tulajdonsága ne legyen. Így a természetes számot mint darabszámot halmaztulajdonságként vezetjük be.

1. példa

Egészítsd ki a rajzokat úgy, hogy mindegyik gyereknek jusson ceruza is és füzet is! (1.5. ábra)



1.5. ábra

Megjegyzések:

- Ha szükséges, a tanulók párosítással is eldönthetik, hogy hány gyereknek kell még ceruzát vagy füzetet adniuk.
- Célszerű olyan feladatot is adni, amelyben az egyik halmaznak eredetileg négynél több eleme van. Ekkor a tanulók áthúzással jelölik a felesleges elemeket.

A bevezető feladatok után megfogalmazzuk, hogy a bemutatott halmazoknak az a közös tulajdonsága, hogy mindegyik ugyanannyi elemből áll. Ezután megnevezzük ezt a darabszámot, esetünkben a négyet.

1.1.3. A számok jelölése és a számírás

Egy konkrét szám bevezetése tehát absztrakció eredménye. A számok megismerésével egyidejűleg felvetődik a számnak mint absztrakt fogalomnak a jelölési módja. Ezzel a kérdéssel eljutunk a számok írásának problémájához. Értelemszerűen az arab számjegyek írását, olvasását tanítjuk meg először. Itt hasonlóan járunk el ahhoz, ahogy a betűírást sajátítják el a tanulók írásórán.

1. példa

Gyakorold a négyes szám írását! (1.6. ábra)

Fontos, hogy a számokkal való ismerkedés során a tanulók meg tudják nevezni és le is tudják jegyezni egy halmaz elemszámát, illetve fordítva: tudjanak mutatni, kirakni vagy rajzolni egy adott számosságú halmazt.

Az arab számjegyekkel történő lejegyzés csupán egy a lehetséges jelölési módok közül. Egy bizonyos szám (számosság) megjelenítésére többféle lehetőség van. Például egy számot megjeleníthetünk korongokkal, pálcikákkal, mutathatjuk az ujjainkkal, használhatjuk a szorobánt, a golyós számolót vagy a matandát.

A történelem során egyéb számírási módok is használatosak voltak. Ezek közül a római számokkal ismertetjük meg a tanulókat, hiszen ezekkel napjainkban is találkozunk.

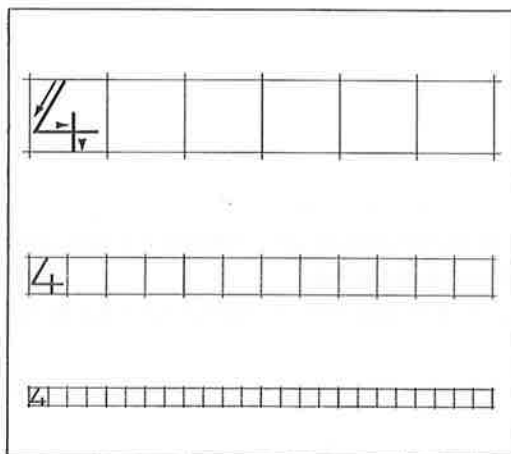
A római számok 1-től 10-ig: I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X.

A tíz szám leírásához mindössze három különböző jelet használunk, ezekből összeadással (2, 3, 6, 7, 8), illetve kivonással (4, 9) kapjuk meg a többi hét számot. Éppen ezért a római számokat csak az összeadás és a kivonás megismerése után érdemes alaposabban tanulmányozni. (A rómaiak a nullára nem vezettek be jelet.)

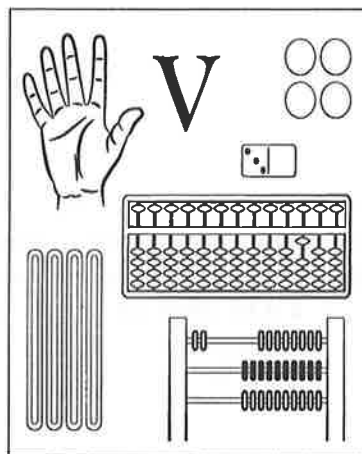
A római számjelek keletkezését nem ismerjük pontosan. Sokan görög-etruszk eredetet sejtene a jelekben, melyek különböző kézfejtartásokhoz köthetők.

2. példa

Karikázd be azokat a rajzokat, amelyek alá a négyes számot írnád! Indokold is meg! (1.7. ábra)



1.6. ábra



1.7. ábra

1.1.4. A természetes szám további értelmezési lehetőségei

Két halmaz számosságát nemcsak kölcsönösen egyértelmű hozzárendelésekkel hasonlíthatjuk össze, hanem számlálással is. A számlálás eredményeként minden halmazhoz hozzá tudunk rendelni egy számot, és ezt követően a konkrét halmazok helyett elegendő csak a számok összehasonlítását elvégeznünk. Egy halmaz elemeinek megszámlálása matematikailag azt jelenti, hogy minden elemhez hozzárendelünk egy számot (sorszámot), majd az ily módon rendezett halmaz utolsó elemének sorszámát tekintjük a halmaz számosságának. Természetesen, mikor megszámloljuk például, hogy hány gyerek van a táblánál, akkor azt úgy mondjuk, hogy egy, kettő, három, négy stb. és nem úgy, hogy első, második, harmadik, negyedik stb., de a rámutatással a gyerekeket sorba rendezzük, és a kimondott számok valójában a sorban elfoglalt helyükre utalnak.

A tanulók a sorszámnak a fenti közvetett jelentésén túl közvetlen jelentésével is találkozhatnak. Különbséget kell tenniük például a négy és a negyedik között. Ennek megtanítása történhet úgy, hogy kihívunk a tábla elé négy gyereket. Megkérjük először őket arra, hogy guggoljon le a négy gyerek, majd arra, hogy guggoljon le a negyedik gyerek mondjuk az ablaktól számolva. Jól látszik, hogy a sorszámmal mindig csak egy elemet (gyereket) jellemzünk. Az írásmódban lévő eltérésre is felhívjuk a figyelmet: a sorszámot a szám jele mögé tett ponttal különböztetjük meg a tőszámtól.

1. példa

Melyik gyerek hányadik lett? Írd a sorszámukat a felettük lévő négyzetekbe!
(1.8. ábra)

Méréseink eredményét egy mérőszám és egy mértékegység együttesével adjuk meg (lásd 3.5.2. fejezet). A mérőszám azt fejezi ki, hogy a kérdéses mennyiség hányszorosa a választott mértékegységnek. Például a 4 más-más mérőszámtartalmat hordoz az alábbi szituációkban:

- a 4 kg alma azt jelenti, hogy ez a mennyiség 4-szerese az 1 kg-os tömeg egységnek,
- a 4 m hosszú fonal azt jelenti, hogy 4-szer olyan hosszú, mint a méterrúd,
- a 4 nap azt jelenti, hogy ennyi idő telik el, mialatt a nap négyszer felkel és lenyugszik.

Az 1. évfolyam elején még kevés példa áll rendelkezésünkre ahhoz, hogy a számok mérőszámokként való értelmezését bemutassuk, hiszen a mérés tanítása későbbi feladat. A színesrúd-készlet azonban alkalmas arra, hogy ezt az értelmezési lehetőséget megvilágítsuk a tanulók előtt.

A kis fehér kockát mértékegységként használva úgy döntjük el, hogy a különböző színű rudakhoz melyik szám tartozzon, hogy megnézzük, hány fehér kockával rakhatók ki az egyes rudak. Ez azt jelenti, hogy alkalmi mértékegységgel megmérjük a rudak hosszát. A mérés eredményeként megállapítjuk például, hogy a piros rúd 4-et ér, mert 4 fehér kockával tudjuk kirakni. Valójában azt állapítjuk meg, hogy 4-szer olyan hosszú, mint a fehér, tehát itt a 4 számnak a mérőszámjelentését használjuk.

2. példa

Keresd meg azt a rudat, amelyik ugyanolyan hosszú, mint

- a) 4 fehér kiskocka,
- b) 4 rózsaszín rúd,
- c) 4 világoskék rúd összetolva!

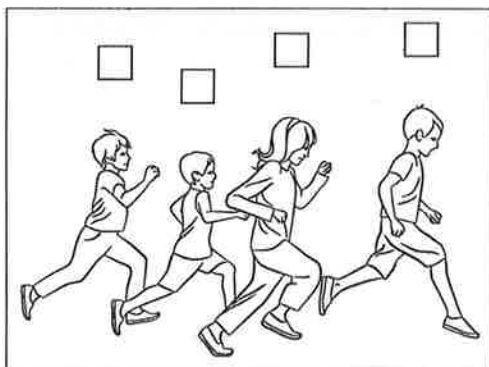
Megjegyzés:

A fehér kiskockát mértékegységként használva mindegyik színes rúdhöz egyértelműen hozzá tudunk rendelni egy számot, és legtöbbször az adott rúd ezzel a számmal azonosítjuk. A feladat arra irányítja rá a figyelmet, hogy a mértékegység választásától függően ugyanaz a szám (mint mérőszám) eltérő mennyiségeket jelöl. Itt nemcsak a piros rúd mérőszáma 4, hanem a bordó és a zöld rúdé is.

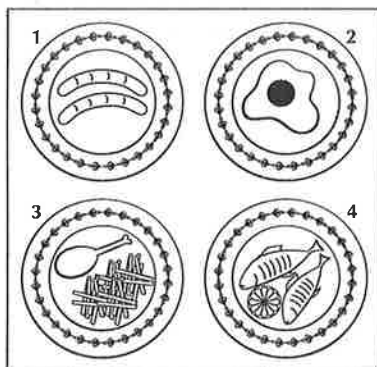
Előfordul, hogy a számokat nem darabszám-, sorszám- vagy mérőszámértelenben használjuk, hanem csupán objektumokat különböztetünk meg velük, például autóbuszokat, autóutakat vagy nagyobb városokban iskolákat. Az ilyen típusú számoknak matematikai jelentést nem tulajdonítunk.

3. példa

Beszélgessünk a képről! Mit ebédel az, aki a 4-es ételt választja? Te melyik ételt választanád? (1.9. ábra)



1.8. ábra



1.9. ábra

1.1.5. A helyi értékes rendszer és a számrendszeres írásmód

Kilépve az egyjegyű számok köréből a gyerekek megismerkednek a helyi értékeken alapuló számrendszeres írásmóddal. Ennek lényege tízes számrendszerben a tízesével történő csoportosítás (például 10 db 1 forintost 1 db 10 forintosra, 10 db 10 forintost 1 db 100 forintosra ... válthatunk be).

A természetes számok halmazának megismerése az 1–4. évfolyamon fokozatosan történik. A folyamatot a matematika tantárgy-pedagógiában lineáris számkörbővítésnek szokás nevezni.

1. évfolyamon 0-tól 20-ig,
2. évfolyamon 100-ig,
3. évfolyamon 1000-ig,
4. évfolyamon 10 000-ig ismerkednek meg a tanulók a természetes számokkal.

A megismerési folyamat természetesen itt nem áll meg, az 5. évfolyamon tovább bővül a számkör, döntően az egymilliós számkörben számolunk, de ebben az életkorban már a tanulók képesek a tetszőlegesen nagy számok megértésére, illetve a számkör végtelenségének felfogására is.

A lineáris számkörbővítés alapja a helyi értékes írásmód tudatosítása. Ezt az 1. évfolyamon elkezdjük, hiszen a 10-nél nagyobb számok bevezetését analógiákra építve, az egyjegyű számok viselkedésére utalva végezzük. Például a 15-öt 10+5-ként vezetjük be. Az év végén pedig a további számkörbővítés előkészítéseként megismertetjük a kerek tízesek (10, 20, ..., 90, 100) fogalmát, ugyancsak az egyjegyű számok analógiáját használva.

A 2. évfolyamon a kétjegyű számok teljes körét megismerve már tudatosan bontjuk a számokat egyesekre és tízesekre.

Szemléltetésre a játék pénz mellett használhatjuk a színes rudakat, figyelembe véve, hogy egy narancssárga rúddal helyettesíthetünk 10 fehér kockát, de alkalmasak a legóelemek is, 10 kis téglát összeépítve a kapott oszlop 10-et ér. A gyufaszálak és a gyufásdobozok szintén a csoportosítás eszközei lehetnek. (1.10. ábra)

A tízestől eltérő számrendszerek bevezetése nem feladata az alsó tagozatnak, ám a számrendszeres számolás alapját képező csoportosítás olyan tevékenység, amely elmélyíti és segíti a tízes számrendszernek és a tízes számrendszerben történő műveletvégzésnek a megismerését. Ezért célszerű ún. csoportosítási, leltározási feladatokat végeztetni, ahol a csoportosítás alapja 10-től eltérő szám.

Például 25 egyforma kis legótéglát csoportosítsunk hármasával! A kapott hármas oszlopokat ismét hármasával stb. (1.11. ábra) A csoportosítás végén készítsünk „leltárjegyzéket”:

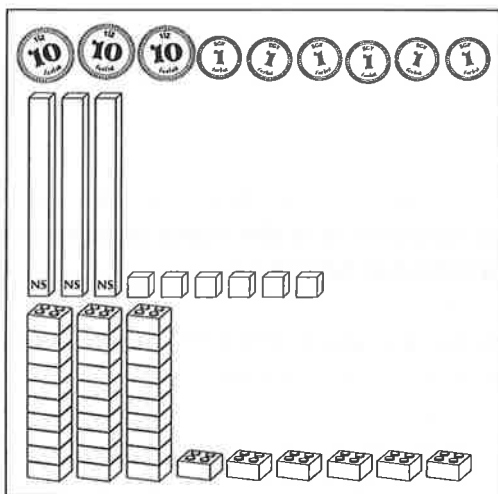
tömb	oszlop	tégla	összesen
2	2	1	25

Ezzel az eljárással gyakorlatilag átváltottuk a 25-öt hármas számrendszerbe.

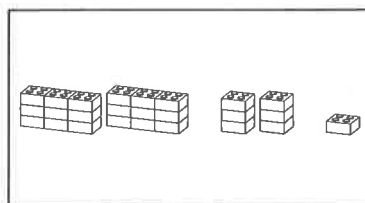
A csoportosítást ugyanannyi elem esetén elvégezhetjük más alapszámmal is, de kiindulhatunk más elemszámból is. A lényeg az, hogy addig végezzük a nagyobb egységre történő beváltást, ameddig lehetséges, és a végén táblázatba jegyezzük le az eredményt. Ezekkel a tevékenységekkel a tízes számrendszertől független helyiérték-táblázat fogalmát alakítjuk ki.

Megjegyzés:

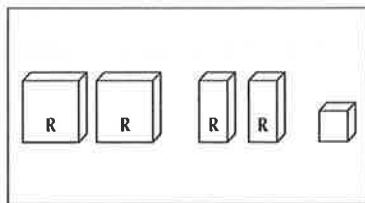
A Dienes-készlet a színesrúd-készlet kiterjesztésének tekinthető. Létezik 2-es, 3-as és 4-es készlet. Mindegyikben megtaláljuk a fehér kiskockát, a megfelelő színű rudat (rózsaszín, világoskék, piros), továbbá a réteget, a nagykockát és az oszlopot. Ezek az elemek az előzőekből építhetők. Például a kettes készletben 1 rúd 2 fehér kiskockából, 1 réteg 2 rúdból, 1 nagykocka 2 rétegből, 1 oszlop pedig 2 nagykockából. Így a Dienes-készletek alkalmasak a kettes, hármas és a négyes számrendszer fogalmának alapozására. (1.12. ábra)



1.10. ábra



1.11. ábra



1.12. ábra

A 3. évfolyamon vezetjük be a háromjegyű számok helyiérték-táblázatos alakját. A számokat százasokra, tízesekre, egyesekre bontjuk, és a számjegyeket beírjuk a helyiérték-táblázat megfelelő oszlopaiba. Például:

száz	tíz	egy
4	5	2

A táblázat segítségével értelmezzük az egyes számjegyek alaki, helyi és valódi értékét. A 452 számban például az 5 alaki értéke az 5-ös számjegy, helyi értéke 10, valódi értéke 50.

A fenti fogalmak alakítását gyakran kombinatorikai feladatokkal kapcsoljuk össze.

1. példa

Képezz háromjegyű számokat a 4, 5, 2 számjegyekből! Foglald helyiérték-táblázatba a kapott számokat! Melyek azok a számok, amelyekben a legkisebb helyi értéken a legnagyobb alaki értékű számjegy áll?

A 4. évfolyamon már négyjegyű számokkal számolunk, tehát megismerjük az egyes, tízes, száz és az ezres helyi értékeket.

A számnevek helyesírásának gyakorlására is sort kerítünk. 2000-ig a számokat egybeírjuk, a 2000-nél nagyobb, nem kerek ezresek írásánál

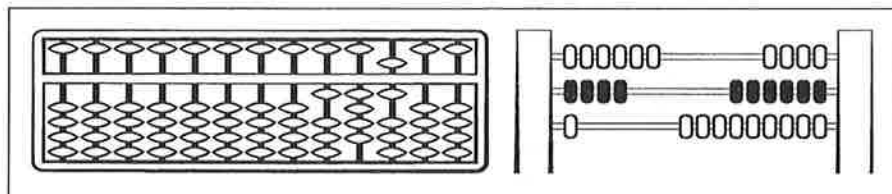
pedig az ezresek után kötőjelet teszünk. Például az 5054 betűkkel leírva: ötezer-ötvennégy.

2. példa

Keress öt olyan négyjegyű számot, amelyben az ezres és a tízes helyi értéken ugyanaz a számjegy, a százasként a legkisebb alaki értékű számjegy, az egyes helyi értéken pedig az ezresek helyén álló számjegynél eggyel kisebb számjegy áll! Írd le a kapott számokat betűvel is!

A tanulók a lineáris számkörbővítés lépéseinek megfelelően megismerkednek tehát a tízes számrendszeres helyi értékes írásmóddal.

A tízes számkörhöz kötődően bevezetett sokféle jelölési, írási módot tovább bővítjük a százasként, ezres számkörökre. Így beszélünk a nagyobb számok szorobánnal, golyós számolóval, matandával történő megjelenítéséről. (1.13. ábra)



1.13. ábra

A római számok

A tízes számrendszeres helyi értékes, arab számjegyekkel történő számírási mód mellett a mindennapi életben a római számok fordulnak elő. A 10-nél nagyobb számok megjelenítéséhez további jeleket vezetünk be: L (50), C (100), D (500) és az M (1000).

A római számírás nem helyi értékes, logikája az összeadás és a kivonás elvén alapul. Az egymás mellé írt számjelek a tíznél nagyobb számok esetében is jelenthetnek összeadást, kivonást vagy összeadást és kivonást vegyesen.

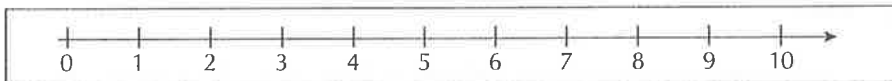
Tisztán összeadásról akkor van szó, ha az egymást követő jelek egyre kisebb számokat jelölnek, például: MDCCXXXVII = $1000 + 500 + 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = 1737$. Tisztán kivonást akkor kell végeznünk, ha a kisebb szám megelőzi a nagyobbát, például CM = $1000 - 100 = 900$.

A legtöbb római számban egyaránt megtaláljuk a kivonás és az összeadás elvét is, például MDCCCXLIX = $1000 + 500 + 100 + 100 + 100 + (50 - 10) + (10 - 1) = 1849$ vagy CDXCIX = $(500 - 100) + (100 - 10) + (10 - 1) = 499$.

1.1.6. A számegyenes

A természetes számokat számegyenesen is szemléltetjük.

Egy tetszőleges egyenesből úgy kapunk számegyeneset, ha kijelölünk rajta egy pontot (a nulla helyét), megadjuk az egységnyi távolságot, és nyíllal megjelöljük a növekedés irányát. Ezzel lehetővé válik, hogy a számoknak egy-egy pontot feleltessünk meg a számegyenesen, és így geometriai jelentést tulajdonítsunk nekik. (1.14. ábra)



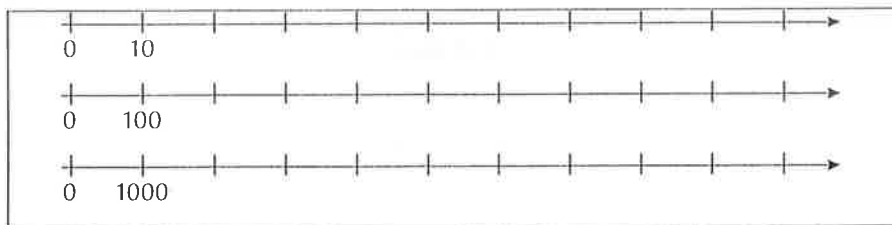
1.14. ábra

A számegyenessel már az első néhány szám megtanítása után megismerkednek a tanulók. Az ezután megtanított további számokat mindig elhelyezzük a számegyenesen. Így a számokhoz vizuális képzet társul, ez segít abban, hogy az adott számot a többi számhoz viszonyítva is értelmezzük. Az egyes számok nagyságát a 0-tól való távolsággal, azaz egy szakasszal jellemezzük. Két természetes szám közül az a nagyobb, amelynek 0-tól való távolsága nagyobb. Gyakorlatilag a természetes számok nagyságviszonyát a számegyenes segítségével szakaszok összemérésére vezetjük vissza (lásd 3.5.1. fejezet).

A lineáris számkörbővítéssel a számegyenes egyre „hosszabb” lesz, hiszen egyre nagyobb számokat kell elhelyeznünk rajta. Ahhoz, hogy nagyobb számokat ábrázolni tudjunk, kézenfekvő megoldás az egységszakasz hosszának csökkentése, de több feladatban előfordul az is, hogy a számegyenesnek csak egy szakaszát ábrázoljuk.

1. példa

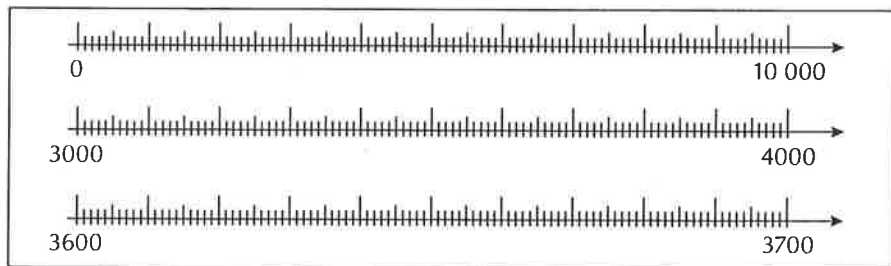
Ábrázold a megfelelő számegyenesen a következő számokat: 24, 240, 2400, 7, 70, 700! (1.15. ábra)



1.15. ábra

2. példa

Írd oda minden tizedik beosztáshoz a megfelelő számot! Keresd meg az alábbi számok helyét mindhárom számegyenesen: 3612, 3658, 3687! (1.16. ábra)

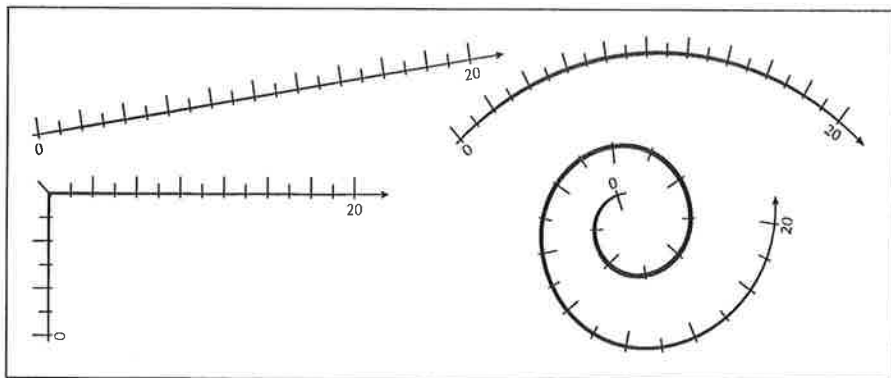


1.16. ábra

Számegyenes helyett használhatunk ún. számvonalat is, jelezve, hogy a hangsúly nem az „egyenes”-en van, hanem azon, hogy a szemléltetésre kiválasztott vonal nyitott, hurokmentes és irányított.

3. példa

Keresd meg mind a 4 számvonalon a 15 helyét! (1.17. ábra)



1.17. ábra

1.1.7. Számszomszédok és kerekített értékek

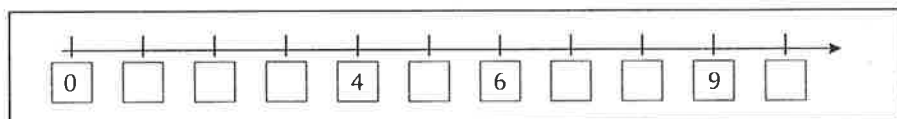
Egy természetes szám (egyes) számszomszédjain azt a két természetes számot értjük, melyeknek az adott számtól való eltérése 1. Így a 0 kivételével minden természetes számnak két számszomszédja van, egy kisebb és egy nagyobb. A 0-nak csak nagyobbik számszomszédja van, ez az 1.

A számszomszédok megkeresése tízes számkörben a számok fogalmi kialakításával egy időben történik, annak természetes velejárója. Miután elhelyezzük az újonnan bevezetett számot a számegyenesen, megállapításokat teszünk a „szomszédjairól”. (A „szomszédtság” igen szemléletes fogalom, könnyű akár egy házsorra, akár a gyerekek sorára asszociálni általa.) Például a 6-nak a kisebbik szomszédja az 5, az 5-nek viszont a 6 a nagyobbik szomszédja.

1. példa

Írd be a 4, 6, 9 számok kisebb és nagyobb számszomszédjait, jelöld ezeket a számokat a számegyenesen! (1.18. ábra)

$$\square < 4 < \square, \quad \square < 6 < \square, \quad \square < 9 < \square$$



1.18. ábra

Megjegyzés:

Helyezzünk hangsúlyt annak felismerésére is, hogy ugyanaz a szám (példánkban az 5) lehet egyszerre kisebb és nagyobb számszomszéd is!

A számszomszéd fogalma erősíti a sorszám fogalmát, és a számok nagyságviszonyainak elmélyítését is szolgálja.

A számkör lineáris bővítésével az egyes számszomszédok mellett beszélünk kettes, hármas stb. számszomszédokról, előkészítve ezzel a kettesével, hármasával stb. számlálást.

A tízes számszomszédok jelentése a fentebb leírtakhoz képest annyiban módosul, hogy itt nem az adott számtól pontosan 10-zel eltérő számokról van szó, hanem arról a két kerek tízesről, amelyeknek az adott számtól való eltérése nem több 10-nél. Például a 36 tízes számszomszédjai a 30 és a 40, a 80 tízes számszomszédjai a 70 és a 90.

A 2. évfolyamtól vezetjük be a tízes, 3. évfolyamtól a százaz, 4.-től az ezres számszomszédokat a tízes analógiájára. Ezzel egyrészt a helyi értékes számolás megértését segítjük, másrészt előkészítjük a kerekítés fogalmát.

Például a 342 egyes számszomszédjai a 341 és a 343, tízes számszomszédjai a 340 és a 350, százaz számszomszédjai pedig a 300 és a 400.

Természetesen az is előfordulhat, hogy egy számnak megegyezik valamelyik egyes, tízes, százaz stb. szomszédja. Például a 499-nek a nagyobbik egyes, tízes és százaz szomszédja egyaránt az 500.

A mindennapi életben gyakran nincs szükség pontos szám adatokra, elegendő közelítő, azaz kerekített értékeket használnunk. Például „A futballmeccsen 5000 néző volt jelen.” vagy „Debrecen lakosainak száma kb. 200 000 fő.”

A számok kerekítése történhet tízesre, százazra, ezresre stb. Egy szám tízesre kerekített értékén a hozzá közelebbi tízes számszomszédját értjük. Ez a megfogalmazás két további kérdést vet fel.

Az egyik az, hogy mit jelent matematikailag az, hogy a „hozá közelebbi”. Ez a szemléletes kifejezés a szám számegyenesen elfoglalt helyére utal, és geometriai jelentést hordoz. Egy számhoz két másik szám közül az van közelebb, amelyiknek a számtól vett eltérése (különbségének abszolút értéke) kisebb.

A másik kérdés, hogy mit tegyünk azokkal a számokkal, amelyek egyenlő távol vannak mindkét tízes számszomszédjuktól. Ezek az 5-re végződő számok. Erre az esetre külön szabályt kellett alkotni, ezt szokás kerekítési szabálynak nevezni: „5-től felfelé kerekítünk”, azaz az 5-re végződő számok tízesre kerekített értéke legyen a szám nagyobbik tízes számszomszédja.

A tízesre kerekítés analógiájára vezetjük be a százazra, ezresre stb. kerekítés fogalmát. A százazra kerekítésnél a százaz számszomszédok közül, az ezresre kerekítésnél az ezres számszomszédok közül kell a közelebbit választanunk. Ha a szám 50-re, illetve 500-ra végződik, akkor százazra, illetve ezresre kerekített értékén a nagyobbik százaz, illetve ezres számszomszédját értjük. Például a 448 tízesre kerekített értéke 450, százazra kerekített értéke 400, ezresre kerekített értéke 0, vagy a 450 tízesre kerekített értéke 450, százazra kerekített értéke 500, ezresre kerekített értéke 0.

2. példa

Írj 5-5 olyan számot, amelyeknek a

- a) tízesre kerekített értéke 640,
- b) százazra kerekített értéke 600,
- c) tízesre és százazra kerekített értéke egyaránt 300!

Megjegyzés:

Mivel napjainkban az 1 és 2 Ft-os pénzermék nincsenek forgalomban, készpénzes fizetésnél az ún. ötökre kerekítést alkalmazzák, azaz az árhoz

legközelebbi 5-tel osztható számnak megfelelő értéket kell fizetnünk. Például 3432 Ft helyett 3430 Ft-ot, de 3433 Ft-helyett már 3435 Ft-ot.

1.2. A természetes számokkal végezhető műveletek bevezetése

A gyermekekben is felmerül az igény, hogy számokkal jellemzett sokaságokból vagy adatokból újabb információkat nyerjenek ki. Például a karácsony közeledtével már elkezdik számolni, mennyit kell még aludni, hogy karácsony legyen. Ehhez tudni kell, hogy hányadik napot írjuk decemberben, és mikor van karácsony. Ezek ismeretében már megkaphatják a szükséges információt, akár úgy, hogy az adott naptól elkezdnek számolni december 24-ig, vagy 24-ből kivonják az éppen aktuális napot. Így a szükséges információ megszerzéséhez összeadási vagy kivonási műveletet kell elvégezni.

Egy adott számhalmazon értelmezett matematikai alpműveleten olyan leképezést értünk, amely egy rendezett számpárhoz egy és csak egy számot rendel. Például a természetes számok halmazán a 6-hoz és a 2-höz hozzárendelhetjük

- az összeadás művelettel a 8-at,
- a szorzás művelettel a 12-t,
- a kivonás művelettel a 4-et,
- az osztás művelettel pedig a 3-t.

Az alpműveletek közül az összeadás és a szorzás minden esetben elvégezhető a természetes számok körében, azaz bármely két természetes szám összege és szorzata természetes szám lesz. A kivonás és az osztás már csak bizonyos esetekben végezhető el. A későbbiekben ez teszi szükségessé a strukturális számkörbővítéseket.

Az alpműveletek elvégzését alsó tagozaton kétféle algoritmus szerint tanítjuk. Ennek megfelelően beszélünk szóbeli és írásbeli műveletvégzésről. Az írásbeli műveletvégzéshez szükséges a magabiztos fejben számolás, ezért fontos, hogy először a szóbeli műveletek elvégzését emeljük megfelelő szintre. A műveletek tanításakor az alábbi felépítést célszerű követni:

1. évfolyam:

- Az összeadás, kivonás értelmezése.
- Szóbeli összeadás, kivonás a 20-as számkörben.

2. évfolyam:

- Szóbeli összeadás, kivonás a 100-as számkörben.

- A szorzás és osztás értelmezése.
- A szorzó- és bennfoglalótábla megismerése.
- Zárójelek használata, műveleti tulajdonságok, összefüggések felfedezése.

3. évfolyam:

- Ezres számkörben a műveletek szóbeli végzése.
- Írásbeli összeadás, kivonás tanítása, valamint az írásbeli szorzás végzése egyjegyű szorzóval.
- Műveleti sorrend, műveleti tulajdonságok, műveletek közötti kapcsolatok felismerése és alkalmazása a számítások elvégzésében és az ellenőrzésben.

4. évfolyam:

- Írásbeli osztás egyjegyű (majd kétjegyű) osztóval, szorzás kétjegyű szorzóval.
- Tízezres, illetve százezres számkörben a műveletek szóbeli végzése.
- Műveleti tulajdonságok, műveletek közötti kapcsolatok megfogalmazása.

1.2.1. Az összeadás értelmezése

A művelet értelmezéséhez össze kell gyűjtenünk azokat a hétköznapi problémákat, melyek megoldása matematikai értelemben összeadásra vezet.

A természetes számokat darabszámként, mérőszámként, sorszámként értelmezzük (lásd 1.1.2. és 1.1.4. fejezetek). Az összeadás értelmezésénél is különbséget tehetünk aszerint, hogy az összeadásban szereplő természetes számot darabszámnak, mérőszámnak vagy sorszámnak tekintjük.

Az alábbiakban a $3 + 2 = 5$ összeadás különböző értelmezési lehetőségeit mutatjuk be úgy, hogy az egyszerűség kedvéért a benne szereplő természetes számokat minden esetben darabszámként értelmezzük. Néhány esetben azonban megmutatjuk, hogyan lehet értelmezni az összeadást, ha a benne szereplő természetes számra nem mint darabszámmal gondolunk. Ezt külön jelezzük a példánál.

Az összeadás mint egyesítés

Első értelmezésben az összeadásra úgy tekintünk, mint egyesítésre. Két olyan véges halmazból indulunk ki, melyeknek nincs közös elemük, azaz metszetük üres (diszjunkt halmazok). A két halmaz elemszámának összegén az egyesítéssel kapott halmaz elemszámát értjük.

1. példa

Van két jó barát, Imi és Peti. Sokszor előfordul, hogy együtt játszanak a játékaikkal. Iminek van 3 katonája, Petinek pedig 2 indiánja. A közös csatajáték során hány bábu lesz a csatatéren?

Megjegyzések:

- A konkrét tárgyakat helyettesíthetjük számolást segítő eszközökkel, például pálcikákkal, korongokkal vagy az ujjainkkal. Ebben az esetben egyéni tevékenységként kérjük meg a tanulókat, hogy a bal kezükön nyissák ki annyi ujjukat, amennyi katonája Iminek volt, a jobbbon pedig annyit, amennyi indiánja Petinek, majd nézzék meg, hogy hány ujjuk van összesen nyitva.
- Ennek az értelmezésnek a $3+2$ mellett a $2+3$ összeadás is megfelel, mert a halmazok egyesítésénél a sorrend nem számít (egyik halmaz sem kiüntetett).

Nemcsak két halmaz, hanem két mennyiség egyesítése is vezethet összeadásra. Ebben az esetben a természetes számokra mint mérőszámokra tekintünk.

2. példa (mérőszámok összeadása)

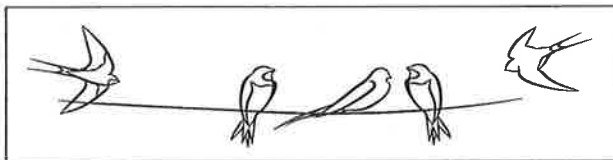
Péternek van otthon két díszes ásványvizes palackja. Az egyik a „Hegyek Kincse”, a másik a „Tiszta Forrás”. Egyszer a poharával megmérte, hogy a „Hegyek Kincse” palackba 8, a „Tiszta Forrás”-ba pedig 7 pohár víz fér. Péter poharával mérve hány pohár víz lesz abban a kancsóban, amelyikbe egy teli „Hegyek Kincse” és egy teli „Tiszta Forrás” palack vizet öntenek?

Az összeadás mint hozzátevés

Ebben az értelmezésben egy előre adott halmazt bővítünk további elemekkel.

3. példa

Egy villanydróton 3 fecske ül. Hozzájuk repül még 2. Hány fecske lesz a dróton? (1.19. ábra)



1.19. ábra

Megjegyzések:

- Az értelmezésben az előre adott halmaz szerepe kitüntetett, így a tagok felcserélhetőségére ebben az esetben nem kell utalnunk.
- A hozzátevés is megvalósítható mennyiségek mérőszámaival.

Az összeadás mint valamennyivel több

Ez az értelmezés összehasonlításon alapul. Egy halmaz ismeretében keressük azt a másik halmazt, amelynek valamennyivel több eleme van.

4. példa

A tanító 3 falevelet hoz az órára, majd megkéri a gyerekeket, hogy a következő órára mindenki gyűjtsön ennél 2-vel többet. Hány falevelet kell hozni a gyerekeknek? (1.20. ábra)

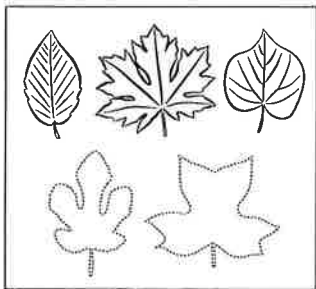
5. példa (mérőszámok összeadása)

Peti 3 kg papírt gyűjtött. Imre szeretné megmutatni, hogy szorgalmasabb, és megfogadja, hogy ő 2 kg-mal több papírt gyűjt. Hány kg papírt kell Imrének gyűjteni, hogy tartsa a fogadalmát?

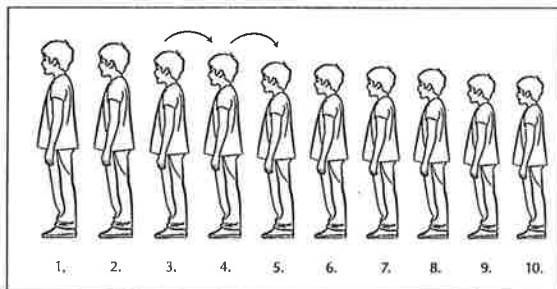
Ha a természetes számokat sorszámként értelmezzük, akkor az összeadás valamennyivel többként való értelmezése a sorrendbe állított elemek mentén a növekvő sorszám irányába történő adott számú lépés megtételét jelenti. A természetes számokat számegyenesen ábrázolva az összeadás jobbra lépegetést jelent.

6. példa (sorszámok összeadása)

A tornasorban Peti a harmadik. Laci két hellyel mögötte áll. Hányadik helyen áll Laci a tornasorban? (1.21. ábra)



1.20. ábra



1.21. ábra

A valamennyivel többként való értelmezés konkrét összehasonlításokban is megjelenik. Ha két halmaz elemszámának ismeretében azt keressük, mennyivel több elemet tartalmaz az egyik, mint a másik, akkor a hiányos összeadáshoz, más néven a pótláshoz jutunk.

7. példa

Az asztalon 5 villa és 3 kés van. Mennyivel van több villa az asztalon, mint kés? (Hány kést kell még az asztalra tenni, hogy ugyanannyi legyen, mint villa?)

Megjegyzések:

- A feladat alapján a következő nyitott mondat (lásd 2.2.1. fejezet) írható fel: $5 \square > 3$. Szavakkal: „Az 5 valamennyivel több, mint a 3.” A megoldást az $5 = 3 + \square$ hiányos összeadás szemlélteti, a kérdésre a választ próbálgatással, illetve kivonással kapjuk meg.
- Ez a típusú összehasonlítás természetesen mennyiségek között, mérőszámokkal is elvégezhető, csakúgy mint sorszámokkal. A mintapéldák megalkotását az olvasóra bízuk.

Az összeadás lejegyzése, az összeadásban szereplő számok elnevezése:

$$\begin{array}{ccc} 3 & + & 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{összeadandó} & & \text{összeadandó} \\ (\text{tag}) & & (\text{tag}) \end{array}$$

Az összeadás eredményét összegnek nevezzük.

Megjegyzés:

Az összeadandók (tagok), összeg szakkifejezésekkel csak a 3. évfolyamon ismertetjük meg a tanulókat.

1.2.2. A kivonás értelmezése

A valóságban egymástól eltérő problémahelyzetek vezethetnek a kivonásra is, ezért ezt a műveletet is többféleképpen értelmezhetjük.

A továbbiakban a $8 - 6 = 2$ kivonás bevezetésének lehetőségeit tárgyaljuk, hasonlóan az összeadáshoz. Itt is elsősorban a természetes szám darabszámként való értelmezésére támaszkodunk.

A kivonás mint az egyesítés megfordítása

Az egyesítés megfordításán azt értjük, hogy egy halmazt két diszjunkt részhalmazra bontunk. A halmaz és az egyik részhalmaz elemszámának ismeretében keressük a másik részhalmaz (a különbség-halmaz) elemszámát.

1. példa

Andi édesanyja elment vásárolni a piacra a gyümölcsárushoz. 8 darab gyümölcsöt vett, amiből 6 körte, a többi alma. Mennyi almát vitt haza Andi édesanyja?

Megjegyzés:

A feladatot korongokkal is kirakhatjuk: „Helyezzünk az asztalra 8 korongot a kék oldalával felfelé. Fordítsunk át 6-ot pirosra. Mennyi maradt kéken?”

A kivonás mint elvétel

Elvétel történik egy halmazból, amikor adott számmal csökkentjük a halmaz elemeinek számát.

2. példa

Andiékánál otthon hétfőn reggel 8 darab alma volt. Andi 6-ot elvitt az iskolába. Mennyi alma maradt így otthon? (1.22. ábra)

3. példa (mérőszámok kivonása)

A levesestálban 8 merőkanálnyi leves van. Édesanya kiszed belőle a tányérokba 6 kanállal. Hány kanálnyi leves marad a tálban?

A kivonás mint valamennyivel kevesebb

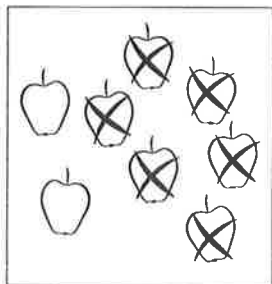
A valamennyivel többhöz hasonlóan ez az értelmezés is összehasonlításra alapul. Egy halmaz ismeretében keressük azt a másik halmazt, amelynek valamennyivel kevesebb eleme van.

4. példa

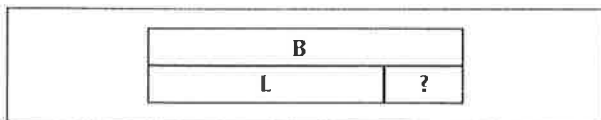
Andi és Edit az iskolából hazafelé menet gesztenyét gyűjtött. Andi 8 darabot, Edit 6-tal kevesebbet. Mennyi gesztenyét gyűjtött Edit?

5. példa (mérőszámok kivonása)

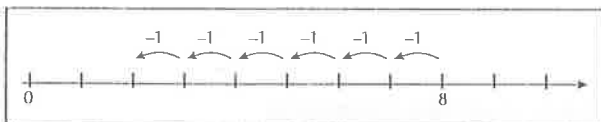
Tedd ki magad elé a bordó rudat! Keresd meg azt a rudat, amelyik pontosan egy lila rúd hosszával rövidebb nála! Írj a kirakásról számfeladatot, ha tudod, hogy a fehér kiskocka 1-et ér! (1.23. ábra)



1.22. ábra



1.23. ábra



1.24. ábra

A sorban a csökkenő sorszámok irányába történő lépések eredménye ugyancsak kivonást jelent. A számegyenesen a kivonásnak a balra lépegetés felel meg.

6. példa (sorszámok kivonása)

Peti a tornasorban a nyolcadik helyen áll. Imi hat helyyel előtte. Hányadik helyen áll Imi? (1.24. ábra)

A valamennyivel kevesebbként való értelmezés konkrét összehasonlításokban is megjelenik. Ha két halmaz elemszámának ismeretében azt keressük, mennyivel kevesebb elemet tartalmaz az egyik, mint a másik, akkor a feladatot nyitott mondattal többféleképpen is lejegyezhetjük. (Lásd 2.2.2. fejezet II. c) bekezdés.)

7. példa

Az asztalon 8 villa és 6 kés van. Mennyivel van kevesebb kés az asztalon, mint villa? (Mennyi villát kell elvenni az asztalról, hogy ugyanannyi legyen, mint kés?)

Megjegyzések:

- A feladat alapján a következő nyitott mondat írható fel: $6 \square < 8$. Szavakkal: „A 6 valamennyivel kevesebb, mint a 8.”

A megoldást a $8 - \square = 6$ hiányos kivonás szemlélteti.

- Ez a típusú összehasonlítás természetesen mennyiségek között, mérőszámokkal is elvégezhető, csakúgy mint sorszámokkal. Például „Tegyél egymás alá egy bordó és egy lila színes rudat! Mennyivel rövidebb a lila rúd a bordónál? Keresd meg azt a rudat, amelyikkel ezt kifejezheted!”

A kivonás lejegyzése, a kivonásban szereplő számok elnevezése:

$$\begin{array}{ccc} 8 & - & 6 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{kisebbitendő} & & \text{kivonandó} \end{array}$$

A kivonás eredményét különbségnek nevezzük.

1.2.3. A szorzás értelmezése

A szorzás mint egyenlő tagok összeadása

Ha az összeadás műveletében ugyanaz az összeadandó szerepel többször, akkor ezt rövidebben is lejegyezhetjük, és így a szorzás műveletéhez jutunk.

1. példa (darabszám szorzása)

Irma párosával szedi a cseresznyét a fáról. Eddig 5 pár cseresznyét szedett le. Összesen hány szem cseresznyéje van? (1.25. ábra)

Megoldás

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$

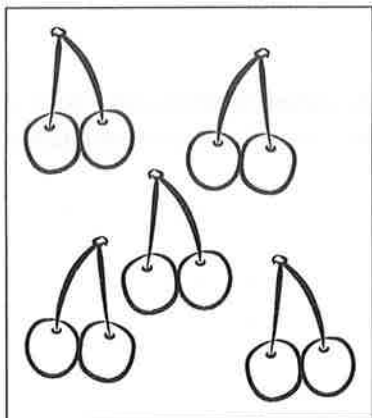
Mivel 5-ször adtuk össze a 2-t, ezért a fenti összeadást rövidebben $5 \cdot 2 = 10$ alakban írhatjuk.

Megjegyzések:

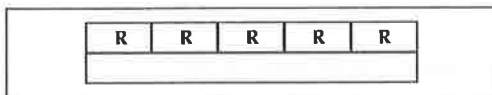
- Mivel a szorzást egyenlő tagok összeadásaként értelmeztük, a feladat azonos elemszámú halmazok egyesítését jelenti.
- A szorzás fenti értelmezésében az első szám mutatja meg, hogy a másodikat hányszor kell összeadni. Az alsó tagozatos tankönyvek között van olyan, amelyik a lejegyzést fordítva végzi, például az $5 \cdot 2$ -n azt érti, hogy az 5-öt kell 2-szer összeadni. Az utóbbi értelmezéshez az írásbeli szorzás lejegyzése igazodik, miszerint annyiszor vesszük a szorzásjel előtti számot, ahányat mutat a szorzásjel utáni szám. Természetesen mindkét módon ugyanahhoz a műveletértelmezéshez jutunk, ám az első időszakban, amíg kép alapján írjuk le a műveletet, fontos, hogy a két szám szerepét következetesen elkülönítsük. Erre mindaddig szükség van, amíg a szorzás kommutatív tulajdonságát (tényezők felcserélhetősége) fel nem fedezik a tanulók.

2. példa (mérőszám szorzása)

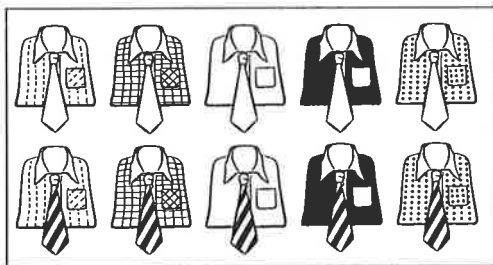
Tegyé ki egymás mellé 5 db rózsaszín rudat, majd keresd meg azt a rudat, amelyik ugyanolyan hosszú, mint ez az 5 együtt! Írd le a először összeadás-sal, majd szorzással! (1.26. ábra)



1.25. ábra



1.26. ábra



1.27. ábra

A szorzás mint halmazok direkt szorzatának számossága

Ha két véges halmaz elemeiből rendezett elempárokat képezünk az összes lehetséges módon, akkor ezen elempárok halmazát a két halmaz direkt szorzatának nevezzük. Mivel két halmaz direkt szorzatának számossága megegyezik a két halmaz számosságának szorzatával, a természetes számok szorzását a halmazok direktszorzatának felhasználásával is értelmezhetjük. Ez az értelmezési mód kapcsolódik a kombinatorika témaköréhez (lásd 4.1.3. fejezet).

3. példa

Edit szeretne vásárolni az édesapjának egy szép inget, és hozzá egy nyakkendőt. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha az üzletben 5 fajta ing és 2 fajta nyakkendő van?

Megoldás

Összesen $5 \cdot 2 = 10$ különböző ing-nyakkendő vagy másképpen: $2 \cdot 5 = 10$ nyakkendő-ing párosítás állítható össze. (1.27. ábra)

Megjegyzés:

A szorzás ezen értelmezése azért fontos, mert nem egy másik műveletre (összeadás) támaszkodik, hanem önálló műveletnek tekinti azt. Ebben az esetben a két szorzótényező szerepe (szorzó és szorzandó) nem különül el, így a szorzótényezők felcserélése az értelmezésből közvetlenül adódik.

Szorzás 1-gyel vagy 0-val

Ha a szorzást ismételt összeadásnak tekintjük, akkor feltételezzük, hogy a tagok száma, azaz a szorzó legalább 2. Ezért az 1 és a 0 szorzó esetére külön ki kell térnünk.

Szorzás 1-gyel: Ha egy természetes számot 1-gyel szorzunk, a szorzat maga a szám lesz. Példával szemlélítve: Edit 5-ször vett el a polcról egymás után 2 darab joghurtot, így pontosan $5 \cdot 2 = 10$ darab joghurtja lett. Ha csak 1-szer vesz le 2 joghurtot, akkor csak 2 joghurtja lesz, azaz $1 \cdot 2 = 2$.

Szorzás 0-val: Ha egy természetes számot 0-val szorzunk, akkor a szorzat 0 lesz. Az előző példával szemlélítve: Ha Edit a polcról nem vesz le egyszer sem 2 darab joghurtot (azaz 0-szor vesz le 2-t), akkor 0 darab joghurtja lesz, azaz $0 \cdot 2 = 0$.

Ha a szorzást két halmaz direkt szorzatával értelmezzük, akkor az 1-gyel vagy a 0-val való szorzás nem tér el az általános esettől. Az értelmező példa szerint az $1 \cdot 2$ azt jelenti, hogy egyféle inghez kétféle nyakkendő közül választunk. Ezt valóban $1 \cdot 2 = 2$ -féleképpen tehetjük meg. $0 \cdot 2$ -n pedig azt értjük, hogy az első halmaz, azaz az ingek halmaza 0 elemű, így nem lehetnek elempárok, azaz nincs ing, nyakkendőt sem tudunk hozzá választani. Tehát a lehetőségeink száma 0.

Megjegyzés:

Azokat az eseteket, amelyekben a szorzandó 1 vagy 0, nem szükséges külön tárgyalni, hiszen a szorzást ismételt összeadásként értelmezve sem igényelnek külön magyarázatot. Például $3 \cdot 1 = 1 + 1 + 1$, vagy $3 \cdot 0 = 0 + 0 + 0$.

A szorzás lejegyzése, a szorzásban szereplő számok elnevezése:

$$\begin{array}{ccc} 5 & \cdot & 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{szorzó} & & \text{szorzandó} \end{array}$$

A szorzó és a szorzandó közös neve: szorzótényezők vagy tényezők.

A szorzás eredményét szorzatnak nevezzük.

1.2.4. Az osztás értelmezése

Az osztás műveletét két különböző tevékenységre építve vezethetjük be. Az elnevezések a tevékenységi háttérre utalnak.

Bennfoglalás

Egy halmazon belül adott, egyenlő számosságú részhalmazokat alakítunk ki, és megállapítjuk a létrehozott részhalmazok számát.

1. példa

Edit virágcsokrokat készít. Hány 3 szálból álló csokrot tud készíteni 12 szál rózsából? Rajzold le a csokrokat!

2. példa (bennfoglalás mérőszámmal)

Jancsi apukájának kannájában 12 liter benzin van. Amikor robogójának tankja kiürül, a kannából teljesen feltölti. Hányszor tudja így megtankolni a robogóját, ha a tank 3 literes?

A fenti példák megoldásához a $12 : 3 = 4$ bennfoglaló osztást kell elvégezni. A bennfoglaló osztást ismételt kivonásként is felfoghatjuk: 12-ből 3-at 4-szer lehet elvenni, azaz $12 - 3 - 3 - 3 - 3 = 0$.

Az osztás mint egyenlő részekre osztás

Egy halmazból adott számú egyenlő számosságú részhalmazokat hozunk létre, és megállapítjuk e részhalmazok számosságát.

3. példa

Edit 3 virágcsokrot szeretne készíteni. A kertjében most éppen 12 szál rózsá nyílt ki. Hány szál virág jut egy csokorba, ha mindegyikbe ugyanannyi kerül? Rajzold le a csokrokat!

A 12-t 3 egyenlő részre kell osztani, így egy csokorba a 12 harmadrésze kerül.

Kezdetben, amíg kép alapján írjuk le a műveletet, a jelöléssel is különbséget teszünk az osztás kétféle értelmezése között, és az egyenlő részekre osztást $12/3 = 4$ módon jelöljük.

Az egyenlő részekre osztás most annak a tevékenységnek felel meg, hogy 12 szál rózsát a kezünkbe véve egyesével („egyed ide, egyed oda, egyed amoda”) szétosztjuk 3 csoportba.

4. példa (egyenlő részekre osztás mérőszámokkal)

Janci anyukája egy 12 cm-es szalagból 3 egyenlő hosszúságú kabátakasztót készít. Hány cm-es egy akasztó?

Megjegyzés:

Az egyenlő részekre osztás vezet majd el a törtfogalom kialakításához (lásd 1.7.1. fejezet).

Az osztás mint a szorzás inverz művelete

Az osztást a szorzás után vezetjük be, ezért értelmezésének egy további lehetősége, ha visszavezetjük a szorzás műveletére. Két természetes szám hányadosa (oszthatóságot feltételezve) az a szám, amely az osztóval megszorozva az osztandót adja.

Például: „Melyik az a szám, amelyet 3-mal megszorozva 12-t kapunk?” Hiányos szorzás, a $3 \cdot \square = 12$ megoldása vezet a $12 : 3 = 4$ osztás hányadosának meghatározásához.

Természetesen ezt a kapcsolatot a két művelet között felhasználjuk az osztás eredményének ellenőrzésekor is.

Bennfoglalás maradékkal

Az osztás nem végezhető el minden esetben a természetes számok halmazán. Ha bennfoglalással egy adott halmazból nem tudunk minden elemet felhasználni a részhalmazok kialakításához, akkor lesznek kimaradó elemeink. Ezek számát maradéknak nevezzük. (A maradék nyilván mindig kisebb, mint az osztó.)

5. példa

Edit virágcsokrokat készít. Hány 3 szálból álló csokrot tud készíteni 14 szál rózsából? Rajzold le!

Megoldás

Edit 4 csokrot tud készíteni, viszont 2 rózsából már nem lesz csokor, így az megmarad, mert $4 \cdot 3 = 12$ és $12 + 2 = 14$.

A maradékos osztás lejegyzése:

$$\begin{array}{r} 14 : 3 = 4 \\ 2 \end{array}$$

Az 1 és a 0 szerepe az osztásban

Osztás 1-gyel:

Ha egy természetes számot 1-gyel osztunk, a hányados maga a szám lesz. Ez a megállapítás az osztás bennfoglalásként és egyenlő részekre osztásként való értelmezéséből egyaránt következik. A bevezető példával szemléltetve: Ha 12 szál rózsát úgy kötünk „csokorba”, hogy mindegyikbe 1-1 szál kerül, akkor 12 csokrot kapunk (bennfoglalás). Ha a 12 rózsát egyetlen csokorba akarjuk kötni, akkor mind a 12 ebbe a csokorba kerül (egyenlő részekre osztás).

Osztás 0-val:

A 0-val való osztás **nem értelmezhető**. Az osztást bennfoglalásként és egyenlő részekre osztásként értelmezve ez az eset nem szemléltethető meggyőzően, ezért felhasználjuk azt a tapasztalatot, hogy az osztás a szorzás inverz művelete. Ebben a megközelítésben például a $12 : 0$ azt jelenti, hogy keressük azt a számot, amelyet 0-val megszorozva 12-t kapunk. Miután már beláttuk, hogy bármely számot 0-val szorozva 0-t kapunk, rájövünk, hogy **nincs olyan szám**, amelyet 0-val szorozva 0-tól különböző számot, ebben az esetben 12-t, kapnánk. Speciálisan a $0 : 0$ pedig azért nem értelmezhető, mert nem egyetlen, hanem végtelen sok olyan szám van, amelyet 0-val megszorozva 0-t kapunk. (Egy művelet akkor értelmezhető, ha két számhoz a művelet elvégzésével pontosan egy szám rendelhető.)

0 osztása 0-tól különböző számmal:

Ha 0-t osztunk egy 0-tól különböző természetes számmal, akkor a hányados 0 lesz. Az állítás igazolásához most is a szorzásra hivatkozunk. Például a $0 : 12$ olyan szám, amelyet 12-vel megszorozva 0-t kapunk. A szorzásnál leírtak miatt ez a szám csak a 0 lehet. Tehát a 0 osztása 0-tól különböző számmal értelmezhető, a hányados ekkor 0.

Az osztás lejegyzése, az osztásban szereplő számok elnevezése:

12	:	4
↓		↓
osztandó		osztó

Az osztás eredményét hányadosnak nevezzük.

1.3. Számolási eljárások

Ha el kell végeznünk egy számolást, akkor két lehetőség áll előttünk: vagy használunk számolási segédeszközt, vagy nem. Számolási segédeszköz lehet a papír-ceruza, az elektronikus számológép vagy valamilyen mechanikus számológép, például a szorobán. Ezen eszközök használatával algoritmikus gondolkodásunkat fejlesztjük, és számolási sebességünket gyorsítjuk.

Fejben történő számolás esetén csak azt követeljük meg, hogy a tanuló ne használjon semmiféle számolási segédeszközt, de ún. tanulási segédeszközöket már használhat. Ilyen eszközök lehetnek konkrét tárgyak, például babszemek, gesztenyék, korongok, pálcikák, de a gyerekek ujjai is. A tanulási segédeszközök a fejszámolás elsajátítását szolgálják, így amikor már magabiztosan számolnak a tanulók fejben, akkor ezen eszközök használatát maguktól elhagyják.

A *fejszámolás* kifejezés helyett a matematika tantárgy-pedagógiában a *szóbeli műveletvégzés* kifejezést is használjuk.

Írásbeli műveletvégzésről akkor beszélünk, ha a műveletben szereplő számokat helyi értékes elrendezésben írjuk fel, és a műveletet az egyes helyi értéken szereplő számjegyekkel végezzük. Az írásbeli műveletvégzés számolási segédeszköze tehát elsősorban a helyiérték-táblázat (ennek felírásához a papír és a ceruza).

A *szóbeli* műveleteket is leírhatjuk, csak ekkor nem alkalmazunk helyi értékes lejegyzési módot.

1.3.1. Szóbeli összeadás

Az összeadást az 1. évfolyamon 20-as, a 2. évfolyamon 100-as, a 3. évfolyamon 1000-es, a 4. évfolyamon 10 000-es számkörben végezzük.

1. évfolyam

Alapozás

Az első szakaszban az összeg 10 alatt marad. Ekkor még az összeadás művelete konkrétan kapcsolódik a tárgyi tevékenységekhez.

Számok bontott alakja

A számok bontott alakjának tanítására a számfogalom alakításával párhuzamosan, az 1. évfolyam 1. félévében kerül sor.

Ha egy természetes számot két vagy több természetes szám összegeként írunk fel, akkor a szám bontott alakját kapjuk. Egy számnak több bontott alakja lehet. Például a 4 bontott alakjai:

$0 + 4, 1 + 3, 2 + 2, 3 + 1, 1 + 1 + 2, 4 + 0, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1.$

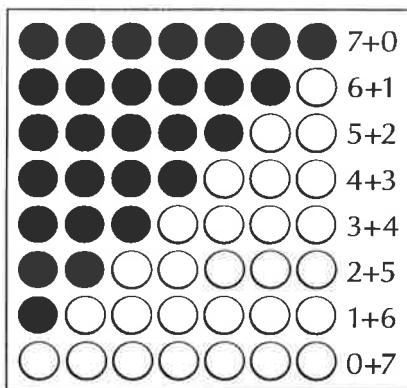
A későbbiekben a bontott alakok közül a két tagra bontásnak lesz nagyobb jelentősége. A két tagra bontás szemléltetésének különböző lehetőségei közül néhányat ismertetünk.

1. példa

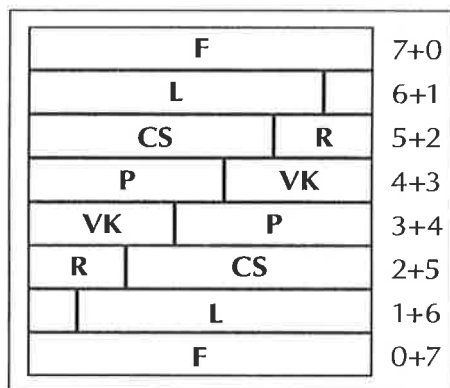
Helyezz 7 korongot az asztalra a piros oldalával felfelé! Fordíts át annyi korongot, amennyit jónak látsz, majd mondd el, hogy hány kék és hány piros korong van előtted! A kirakást írd le összeadással! (1.28. ábra)

2. példa

Válaszd ki a fekete rudat, majd szőnyegezd két rúddal, többféleképpen! A kapott kirakásokat írd le a matematika nyelvén is, ha tudjuk, hogy a fehér kiskocka 1-et ér! (1.29. ábra)



1.28. ábra



1.29. ábra

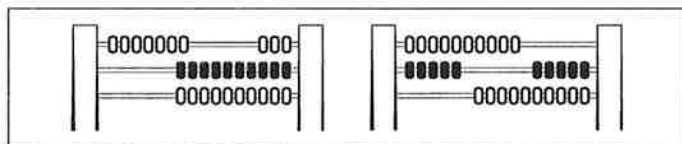
Tízestlépés

A második szakaszban 20-as számkörben végzünk összeadásokat.

A tízesátlépés módszere viszonylag nehéz, csak azután kezdjük tanítani, amikor a tanulók 10-es számkörben már jól számolnak, és ismerik a számok bontott alakjait is. A módszer lényege az, hogy ha az összeg átlépi a tízet, akkor a második tagot olyan bontásban írjuk fel, hogy a bontás első tagja tízre pótolja az összeadás első tagját. Például:

$$7 + 8 = 7 + (3 + 5) = (7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15$$

Ezt az eljárást jól lehet szemléltetni a golyós számolón. Ha az első soron 7 golyó van, amihez hozzá szeretnénk adni 8-at, akkor először 3 golyót tudunk elhúzni az első sorból, a fennmaradó 5-öt pedig már csak a második sorból. (1.30. ábra)



1.30. ábra

Megjegyzés:

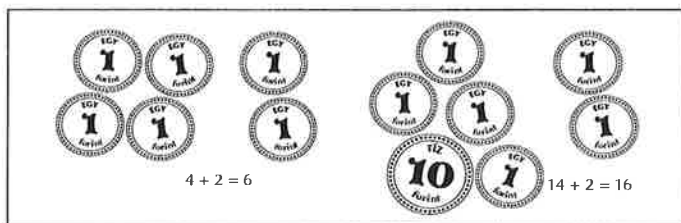
A tízesátlépés megértéséhez szükség van az összeadás egyik műveleti tulajdonságának, a csoportosíthatóságnak az alkalmazására (lásd 1.4.1. fejezet).

Összeadás 20-as számkörben tízesátlépés nélkül

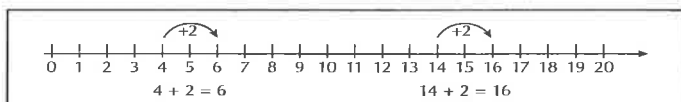
9-nél nagyobb számokhoz úgy adunk egyjegyű számot, hogy az összeg ne legyen több 20-nál. A tanulóknak azt kell észrevenniük, hogy hasonlóan kell elvégezni például a $14 + 2 = 16$ összeadást, mint a $4 + 2 = 6$ -ot, csak annyi a különbség, hogy az első összeadás első tagja 10-zel nagyobb, mint a második összeadás első tagja, így csak az egyesek száma változik.

Ezt az analógiát nagyon jól lehet szemléltetni

- játék pénzzel (1.31/a ábra)
- számegyenesen (1.31/b ábra)



1.31/a. ábra



1.31/b. ábra

Ebben az esetben is az összeadás csoportosíthatóságát használtuk ki:
 $14 + 2 = (10 + 4) + 2 = 10 + (4 + 2) = 10 + 6 = 16$

További módszerek

A tízesátlépés módszerét ne tekintsük kizárólagos módszernek. Az összeadás műveleti tulajdonságait felhasználva (lásd 1.4.1. fejezet) bizonyos esetekben másképpen, egyszerűbben is számolhatunk.

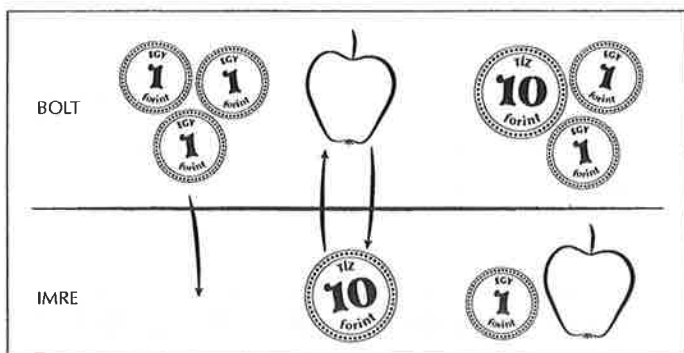
A „boltos” módszer lényege, hogy ha egy számhoz 9-et vagy 8-at kell hozzáadni, akkor könnyebb a számhoz 10-et adni, majd kivonni 1-et vagy 2-t.

3. példa

A boltos pénztárában van 3 darab egyforintos, és van egy eladó almája, ami 9 Ft-ba kerül. Iminek pont egy tízforintos van. Szeretné megvenni az almát. Hány forint lesz a pénztárban a vásárlás után?

Megoldás

Imi nem tud adni 9 forintot, viszont tud egy tízest adni, de akkor 1-gyel többet adott. Így a boltosnak 13 forintja lesz, ami 1-gyel több, mint amennyinek lenni kellene, így visszaad Iminek 1 forintot. Tehát ha a boltos eladja az almát, akkor neki $3 + 10 - 1 = 13 - 1 = 12$ forintja lesz. (1.32. ábra)



1.32. ábra

Duplázó módszer

Ha ismerjük a számok dupláját, akkor néhány összeg kiszámításánál ez is adhat segítséget. A $6 + 8$ -at például úgy számítjuk, hogy vagy a 6-ot duplázzuk, és az eredményhez hozzáadjuk a 2-t, amennyivel a 8 több a 6-nál, vagy a 8-at duplázuk, és az eredményből levonjuk a 2-t, amennyivel a 6 kevesebb a 8-nál.

2. évfolyam

2. évfolyamon továbbengedjük a tanulókat a húszas, majd a harmincas számkörön is. Az igazi – és újdonságot jelentő – nagy lépés a százas számkör. Ehhez szükséges a kétjegyű számok helyi értékes írásmódjának ismerete.

A kétjegyű számokat két csoportba soroljuk: kerek tízesek (például 20, 40, 90) és teljes kétjegyű számok (például 13, 35, 88). Ezeket a számokat célszerű játék pénzekkel (tízesekkel és egyesekkel) vagy más eszközökkel (10-es tojástartó, legóelemek stb.) szemléltetni. Az alábbiakban a tanítás fokozatait egy-egy magyarázó példán keresztül mutatjuk be.

Kerek tízesek összeadása

Kapcsolatot keresünk az egyjegyű számok és a kerek tízesek összeadása, például a $4 + 2 = 6$, illetve a $40 + 20 = 60$ között. Játék pénzekkel szemléltetve ez a két összeadás 4 és 2 db egyes, illetve 4 és 2 db tízes kirakását jelenti.

Kerek tízesek és egyesek összeadása

Ezen összeadások a kétjegyű számok helyi értékes szerkezetének a megértését is szolgálják: $40 + 2 = 42$.

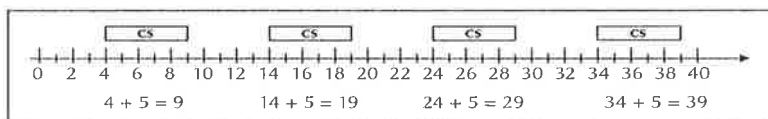
Teljes kétjegyű számhoz egyjegyű szám hozzáadása

– tízesátlépés nélkül

Az egyjegyű számok összeadásából kiindulva analógiákra építünk:

$$4 + 5 = 9, 14 + 5 = 19, 24 + 5 = 29, 34 + 5 = 39, \dots$$

Ennek megértéséhez jól használható a számegyenes (mérőszalag) és a színesrúd-készlet. (1.33. ábra)



1.33. ábra

– tízesátlépéssel

Hasonló módon, az analógiát és az első esetről megtanult algoritmust használva:

$$4 + 9 = 13, 14 + 9 = 23, 24 + 9 = 33, 34 + 9 = 43, \dots$$

Teljes kétjegyű számhoz kerek tízes hozzáadása

Itt azt az összefüggést kell észrevenni, hogy amikor csak tízeseket adunk egy teljes kétjegyű számhoz, akkor az egyesek száma nem változik:

$$42 + 20 = 62, 72 + 10 = 82, 37 + 40 = 77, 58 + 30 = 88$$

Teljes kétjegyű számok összeadása

Ez a legnehezebb szint, tanítását célszerű visszavezetni az előbbi esetekre oly módon, hogy a második tagot kettébontjuk tízesekre és egyesekre. Ezután az első taghoz először hozzáadjuk a kerek tízeseket, majd utána az egyeseket.

– tízesátlépés nélkül

Az egyesek összeadásával nem lépjük át a tízet:

$$36 + 53 = 36 + (50 + 3) = (36 + 50) + 3 = 86 + 3 = 89$$

Megjegyzés:

Ugyanezt az összeadást úgy is elvégezhetjük, hogy előbb külön összeadjuk a tízeseket és külön az egyeseket, majd a kapott tízesekből és egyesekből képezzük az eredményt:

$$36 + 53 = (30 + 6) + (50 + 3) = (30 + 50) + (6 + 3) = 80 + 9 = 89$$

Itt a kétjegyű szám tízesekre és egyesekre bontásán kívül felhasználtuk azt is, hogy a tagok felcserélhetők és csoportosíthatók.

– tízesátlépéssel

Az egyesek összeadásával tíznél nagyobb számot kapunk:

$$28 + 17 = 28 + (10 + 7) = (28 + 10) + 7 = 38 + 7 = (38 + 2) + 5 = 40 + 5 = 45$$

Megjegyzés:

Az előbbi módszert – mindkét tag tízesekre és egyesekre bontását – most is alkalmazhatjuk, azonban figyelni kell, hogy az egyesek összeadása után tíznél nagyobb számot kapunk, így ezt előbb ismét fel kell bontanunk tízesre és egyesekre:

$$28 + 17 = (20 + 8) + (10 + 7) = (20 + 10) + (8 + 7) = 30 + 15 = 40 + 5 = 45$$

3–4. évfolyam

A 3–4. évfolyamon már az 1000-es és 10 000-es számkörben kell számolni. Az 1. és 2. évfolyamhoz hasonlóan itt is fel lehetne építeni a nehézségi szinteket annak megfelelően, hogy a három-, illetve a négyjegyű szám teljes (346, 2471), kerek tízes (450, 7850), kerek százas (800, 6500) vagy kerek ezres (7000, 4000). Azonban vegyük figyelembe, hogy egy teljes négyjegyű számhoz (ahol minden számjegy nullától különböző) egy teljes négyjegyűt fejben hozzáadni nagyon nehéz. Így a pontos összeadást a mindennapi életben felválthatja a becslés. Ha egy üzletbe bemegyünk vásárolni, akkor a pénztárnál nem adjuk össze a vásárolt termékeink árát, de százasokra kerekítve megbecsüljük azt. Ha jelentős eltérést tapasztalunk, akkor átnézzük a blokkot.

Szóbeli számolás kerek számokkal

A 2. évfolyamon megtanult fokozatokat terjesztjük ki kerek tízesekre, százásokra és ezresekre.

- Egyjegyű számok összeadása alapján:

$$3 + 2 = 5 \quad 30 + 20 = 50 \quad 300 + 200 = 500 \quad 3000 + 2000 = 5000$$

- Kerek tízeshez egyjegyű szám hozzáadása alapján:

$$30 + 2 = 32 \quad 300 + 20 = 320 \quad 3000 + 200 = 3200$$

- Teljes kétjegyű számhoz egyjegyű szám hozzáadása alapján:

$$35 + 2 = 37 \quad 350 + 20 = 370 \quad 3500 + 200 = 3700$$

- Teljes kétjegyű számhoz kerek tízes hozzáadása alapján:

$$35 + 20 = 55 \quad 350 + 200 = 550 \quad 3500 + 2000 = 5500$$

- Teljes kétjegyű számok összeadása alapján:

$$35 + 23 = 58 \quad 350 + 230 = 580 \quad 3500 + 2300 = 5800$$

Megjegyzés:

A 2. évfolyamon megismert általános algoritmus természetesen többjegyű számok összeadására ugyanúgy alkalmas, csak nehézkes:

$$\begin{aligned} 345 + 278 &= 345 + 200 + 70 + 8 = 545 + 70 + 8 = 545 + 60 + 10 + 8 = \\ &= 605 + 10 + 8 = 615 + 8 = 615 + 5 + 3 = 620 + 3 = 623 \end{aligned}$$

Az összeg becslése

Egy művelet eredményének becslése azt jelenti, hogy számok kerekített értékeivel végezzük el a kijelölt műveletet. Így az eredmény is kerekített érték lesz. A kerekítés történhet tízesekre, százasokra vagy ezresekre. A becslési utasítás előtt mindig meg kell mondanunk, milyen kerekített értékekkel kell becsülni.

Először olyan becsléseket végezzünk, ahol minimális a különbség a pontos összeg és a becsült érték között. Például $385 + 223 = 608$, amit ha becsülni akarunk százasokra kerekítve, $400 + 200 = 600$ -at kapunk. A 600 és a 608 között nagyságukhoz képest minimális az eltérés.

Később adhatunk olyan összeadásokat is, ahol jóval nagyobb az eltérés, azaz pontatlanabb a becslés. Nézzünk erre is egy példát, százasokra kerekítve becsüljük meg az összeget:

$$253 + 168 + 571 + 474 \approx 300 + 200 + 600 + 500 = 1600$$

$$253 + 168 + 571 + 474 = 1466$$

A két szám (1600 és 1466) között nagyságukhoz képest jelentős eltérés van. Ez természetesen abból fakad, hogy ennél az összeadásnál mindegyik tagot a kerekítés szabályainak megfelelően felfelé kerekítettük, így minden esetben növekedett az összeg. (Legrosszabb esetben a négy tag mindegyikénél 50-nel nagyobb szám lesz a kerekített érték, így az összeg legfeljebb 200-zal térhet el a számított értéktől.)

Érdemes felhívni a tanulók figyelmét a következőkre. Ha sok taggal dolgozunk, akkor általában vegyesen fordulnak elő a számok abban az értelemben, hogy egyszer felfelé, másszor lefelé kell kerekíteni őket. Így ezek a kerekítések kiegyenlítik egymást.

Nézzünk erre is egy példát, egy bevásárlás blokkját:

NYUGTA	
KLEENEX BALSAMO/DO	150 F
CAPELIN KAVIAR FEK	250 F
PAPAT SOMKA VF.3KG	294 F
B.210 kg	1399/kg
DANKO TEJFOL 20x17	145 B
METÉLOHAGYHA ZOLDP	199 C
TS KOKTEL PAR.250G	250 C
KÉTYÓBORKA DB-05	239 C
SZARV. MOZZA.225/100	185 B
TS SOSPALCICA 500GR	318 B
FÜSIÖLT FIZZA MOZZA	749 C
KARAVAN FÜSTI. SAJT	749 C
PIR. MEGGY SZOMP	359 C
OLASZ KENYER 0,25 E	550 B
2	299
ENGEDHETNY/FELAR	
-20C	
RÉSZÖSSZEG	4.750 Ft
KÉSZPÉNZ	5000
VISSZAJARO	210
ÖSSZESEN:	4.750 Ft
	5.000
VISSZAJARO	210

A blokkon szereplő vásárolt termékek értéke:

$$359 + 299 + 294 + 145 + 199 + 299 + 239 + 185 +$$

Ennek becslése százasokra kerekítve:

$$400 + 300 + 300 + 100 + 200 + 300 + 200 + 200 +$$

$$+ 300 + 700 + 700 + 400 + 600 = 4700$$

Igaz ugyan, hogy a kerekítési szabályok szerint a 4792-t már 4800-ra kellene kerekíteni, de vásárláskor, ha 4700-nak becsüljük a fizetendő összeget, akkor egy 4792 forintos számlánál már nyugodtak lehetünk, hogy sokat nem tévedhetett a pénztáros.

Érdemes megjegyezni, hogy jelenleg Magyarországon a készpénzes forgalomban nincs 1 és 2 forintos címlet. Így minden vásárláskor, ha készpénzzel szeretnénk fizetni, a fizetendő összeget 5 vagy 10 forintra kerekítik. Ha mindig készpénzzel fizetünk, akkor év végén kiadásunk körülbelül ugyanannyi lesz, mintha mindig a pontos összeget adtuk volna oda.

1.3.2. Szóbeli kivonás

A kivonást párhuzamosan tanítjuk az összeadással, de általában oly módon, hogy a műveletek értelmezését, majd a műveletvégzés egyes fokozatainak tanítását először az összeadással kezdjük, utána a kivonással folytatjuk. Az egyes évfolyamokon természetesen ugyanazon számkörökben mozgunk, mint az összeadásnál.

1. évfolyam

Alapozás

Az első szakaszban tízes számkörben végzünk kivonásokat, azaz egyjegyű számokat vonunk ki. Ekkor a kivonás művelete konkrét tárgyi tevékenységekhez kapcsolódik.

Tízesátlépés

A kivonásnál is ugyanazt a gondolatmenet követjük, mint az összeadásnál. A kisebbitendőből a kivonandót két részletben vesszük el oly módon, hogy először a kisebbitendő 10-re csökkenjen. 10-ből pedig már könnyebb elvenni a „második részletet”. Ahogy az összeadásnál, itt is szükséges ismerni a számok bontott alakjait:

$$13 - 5 = 13 - 3 - 2 = (13 - 3) - 2 = 10 - 2 = 8$$

A leírtakból látszik, hogy a 10 bontott alakjainak, így a 10-ből való elvételnek készség szintű ismerete mellett a tanulóknak azzal is tisztában kell lenniük, hogyan vonunk ki teljes kétjegyű számból egyjegyűt úgy, hogy 10 maradjon.

Kivonás 20-as számkörben tízesátlépés nélkül

A következő lépés, amikor a 20-as számkörben végzünk kivonást tízesátlépés nélkül. Az egyjegyű számok kivonásának analógiájára: $7 - 3 = 4$, $17 - 3 = 14$.

Megjegyzés:

Ahogy az összeadásnál is láhattuk, néhány kivonásnál célszerűbb más módszerekhez folyamodni, például amikor a kivonandó 9 vagy 8.

Ha egy számból 9-et kell kivonni, akkor előbb 10-et vonunk ki, és a különbséget megnöveljük 1-gyel: $15 - 9$ helyett végezzük el a $15 - 10 = 5$ kivonást. 1-gyel többet vontunk ki, így a különbség is 1-gyel több lesz: $15 - 9 = 6$. Hasonlóan járhatunk el, ha a kivonandó 8. Az eljárásban a kivonás változásaira vonatkozó műveleti tulajdonságot (lásd 1.4.1. fejezet) használjuk fel.

2. évfolyam

A szóbeli kivonásnál az összeadásnál ismertetett nehézségi szintek alapján az alábbi fokozatokat különböztetjük meg.

Kerek tízesek kivonása

Kapcsolatot keresünk az egyjegyű számok és a kerek tízesek kivonása között:

$$5 - 2 = 3, 50 - 20 = 30$$

Teljes kétjegyű számból kerek tízeseinek, illetve egyeseinek kivonása

$$68 - 60 = 8, 68 - 8 = 60$$

Ezeket a kivonásokat jól tudjuk szemléltetni játék pénzekkel vagy egyéb, tízes csoportosításokat lehetővé tevő eszközökkel (például 10 db-os tojástartó), ugyanis vagy csak a tízeseket vesszük el, vagy csak az egyeseket.

Teljes kétjegyű számokból egyjegyű számok kivonása

– tízesátlépés nélkül

Az egyjegyű számok kivonásából kiindulva analógiákra építünk:

$$7 - 5 = 2, 17 - 5 = 12, 27 - 5 = 22, 37 - 5 = 32, 47 - 5 = 42, \dots$$

– tízesátlépéssel

Hasonló módon, az analógiát és az első esetenél megtanult algoritmust használva:

$$17 - 8 = 9, 27 - 8 = 19, 37 - 8 = 29, \dots$$

Teljes kétjegyű számból kerek tízes kivonása

$$37 - 20 = 17, 46 - 10 = 36$$

Teljes kétjegyű számból teljes kétjegyű szám kivonása

Ez a legutolsó és egyben legnehezebb szint is. Tanításakor itt is az a cél, hogy az előbb említett esetekre vezessük vissza. Ennek érdekében a kivonandót két lépésben vonjuk ki. Először a tízeseket, majd az egyeseket:

– **tízesátlépés nélkül**

$$36 - 14 = 36 - 10 - 4 = 26 - 4 = 22$$

– **tízesátlépéssel**

$$36 - 19 = 36 - 10 - 9 = 26 - 9 = 17$$

3–4. évfolyam

A kivonás esetében ezen a két évfolyamon is az összeadásnál megismert lépéseket követjük. A számkör bővülésével természetesen egyre nehezebb elvégezni a kivonást. Ezért fontos szerep jut a különbség becslésének. A különbség becslését kerekített számok kivonásával végezzük.

A 2. évfolyamon megtanult fokozatokat terjesztjük ki kerek tízesekre, százakra és ezresekre.

Megjegyzés:

A 2. évfolyamon megismert általános algoritmus természetesen többjegyű számok kivonására ugyanúgy alkalmas, csak nehézkes:

$$\begin{aligned} 345 - 278 &= 345 - 200 - 70 - 8 = 145 - 70 - 8 = 145 - 40 - 30 - 8 = \\ &= 105 - 30 - 8 = 75 - 8 = 75 - 5 - 3 = 70 - 3 = 67 \end{aligned}$$

Az összeadásnál már részleteztük a becslés fontosságát a mindennapi életben. Amikor egy üzletben vásárolunk, nemcsak a vásárolt áruk árának összegét célszerű megbecsülni, hanem a visszajáró pénzt is. Ha fizetendő mondjuk 3634 Ft, akkor adunk egy 5000 Ft-ost a pénztárosnak. A 3634-et kerekítjük 3600-ra, és gyorsan kiszámoljuk, hogy a visszajáró körülbelül 1400 Ft lesz. Lehet vásárlás közben úgy is számolni, hogy a nálunk lévő pénzből folyamatosan vonjuk ki vásárolt termékek kerekített árát, így minden pillanatban tudjuk, hogy körülbelül mennyi pénzért vásárolhatunk még.

1.3.3. A szóbeli szorzás

2. évfolyam

A szorzás értelmezése után, de még a szorzótáblák módszeres tanítása előtt célszerű különböző szorzatokat tárgyi tevékenységhez kötődően bemutatni.

1. példa

Helyezz a padra 12 korongot sor-oszlop elrendezésben! Keress többféle megoldást! Írd le szorzással!

2. példa

Szőnyegezd azonos rudakkal többféleképpen a zöld rudat! Írj szorzásokat a kirakásokról!

A szorzótáblák

A szorzótábla olyan szorzatokat tartalmazó táblázat, amelyben a szorzandó rögzített (legalább 1 és legfeljebb 10), a szorzó pedig 1-től 10-ig növekvő sorrendben változik. Például a 3-as szorzótábla:

$1 \cdot 3 =$	3
$2 \cdot 3 =$	6
$3 \cdot 3 =$	9
$4 \cdot 3 =$	12
$5 \cdot 3 =$	15
$6 \cdot 3 =$	18
$7 \cdot 3 =$	21
$8 \cdot 3 =$	24
$9 \cdot 3 =$	27
$10 \cdot 3 =$	30

Az egyes szorzótáblák bevezetésének előkészítéseként állandó különbségű sorozatokat (lásd 5.3.1. fejezet) képezzünk, azaz nem egyesével, hanem kettesével, hármasával stb. számolunk.

A 3-as szorzótáblánál maradva ez azt jelenti, hogy 3-mal kezdve hármasával számolunk, a számegyenesen hármasával lépkedünk, azaz képezzük a 3, 6, 9, ..., 30, ... sorozatot.

A szorzótáblák felépítését tevékenységekhez, illetve képekhez kötjük, tanításuk sorrendje többféle lehet. Leggyakrabban kétféle tanítási sorrenddel találkozunk. Az egyiket a szorzandók növekvő sorrendje határozza meg, a másikat a szorzótáblák közötti kapcsolat.

A szorzótáblák tanítása a szorzandók növekvő sorrendjében

Először az 1-es, majd a 2-es szorzótáblát építjük fel. A szorzatokat összegalakban is felírjuk. Ezt követik sorrendben a 3-as, 4-es, ..., 10-es szorzótáblák. Így minden egyes új szorzótábla megtanításával 10-zel bővül a számkör.

Megvizsgáljuk az egyes szorzótáblákban szereplő szorzatokat, és kapcsolatokat keresünk közöttük. Például a $2 \cdot 3$ 3-mal több, mint az $1 \cdot 3$, a $3 \cdot 3$ 3-mal több, mint a $2 \cdot 3$.

Miután a gyerekek megtanulták mindegyik szorzótáblát, kitérünk a közöttük lévő kapcsolatokra is. Példák:

- A 3-as szorzótáblában előforduló számok közül minden másodikat megtaláljuk a 6-os szorzótáblában is.
- A $8 \cdot 4$ ugyanannyi, mint a $4 \cdot 8$.
- A 24 egyaránt megtalálható a 3-as, 4-es, 6-os és 8-as szorzótáblákban.

A szorzótáblák tanításának sorrendje a köztük lévő kapcsolat szerint
Először az 1-es, 10-es és 5-ös szorzótáblákat építjük fel. A szorzatokat természetesen összehalokban is felírjuk.

Előbb az egyes szorzótáblákon belül szereplő szorzatokat vizsgáljuk meg kapcsolatokat keresve közöttük, majd a két tanult szorzótábla szorzatait hasonlítjuk össze. Például az 5-ös szorzótáblában előforduló számok közül minden másodikat megtaláljuk a 10-es szorzótáblában is.

A 10-es és 5-ös szorzótábla után a 2-es, a 4-es és a 8-as szorzótáblát építjük fel ugyanilyen megfontolással, majd kapcsolatokat keresünk a szorzótáblák szorzatai között.

A 2-es, 4-es, 8-as szorzótábla után a 3-as, 6-os és 9-es szorzótáblát mutatjuk be az eddigiekhez hasonlóan.

Legvégül marad a 7-es szorzótábla.

•	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Miután a tanulók 0-tól 10-ig minden szorzótáblát megismertek, összeállítjuk az egyesített szorzótáblát, az ún. *kisegyszeregyet*.

A szorzótáblák megtanítását követően olyan szorzásokat végzünk, ahol az egyik tényező 10 és 20 között van, a másik pedig egyjegyű szám. (Vigyázzunk arra, hogy a szorzat 100 alatt maradjon.) Ehhez felhasználjuk azt a műveleti tulajdonságot, mely szerint a szorzás disztributív az összeadásra nézve (lásd 1.4.4. fejezet). A kétjegyű szorzandót vagy szorzót helyi érték szerint kéttagú összegre bontjuk, és tagonként elvégezzük a szorzást. Így a szorzást visszavezetjük olyan szorzásokra, melyeket a szorzótáblákból már ismerünk. Például:

$$3 \cdot 14 = 3 \cdot (10 + 4) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 4 = 30 + 12 = 42 \text{ vagy}$$

$$15 \cdot 6 = (10 + 5) \cdot 6 = 10 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 60 + 30 = 90$$

3–4. évfolyam

Kerek tízes, százás és ezres szorzása egyjegyű számmal

Először 10-et, 100-at, 1000-et szorozzunk egyjegyű számmal.

Például: $5 \cdot 10$, $5 \cdot 100$, $5 \cdot 1000$

Ezt követően kerek tízest, százast, ezrest szorzunk egyjegyű számmal.

Például: $6 \cdot 2$, $6 \cdot 20$, $6 \cdot 200$, $6 \cdot 2000$

Analógiás gondolkodással, játék pénzekkel szemléltetve belátható, hogy 6 db kettes, 6 db húszas, 6 db kétszázás, 6 db kétezres rendre 12 db egyes, tízes, százás, ezres, azaz 12, 120, 1200, 12000.

Teljes kétjegyű (háromjegyű) szám szorzása egyjegyű számmal

A szorzandót helyi érték szerint bontjuk, két- (három-) tagú összegre, majd a disztributív tulajdonságot felhasználva:

$$7 \cdot 352 = 7 \cdot (300 + 50 + 2) = 7 \cdot 300 + 7 \cdot 50 + 7 \cdot 2 = 2100 + 350 + 14 = 2464$$

Szorzás 10-zel, 100-zal, 1000-rel

Analógiák megfigyelésével felfedeztetjük, hogy ezekben a szorzásokban a szorzandó mindegyik számjegye eggyel, kettővel vagy hárommal nagyobb helyi értékre kerül:

$$10 \cdot 35 = 350, 100 \cdot 35 = 3500, 1000 \cdot 35 = 35\,000$$

Kerek kétjegyű tízesek szorzata

Felhasználjuk a szorzás csoportosíthatóságát (lásd 1.4.2. fejezet). Például:

$$30 \cdot 40 = (3 \cdot 10) \cdot 40 = 3 \cdot (10 \cdot 40) = 3 \cdot 400 = 1200$$

Felhívjuk a tanulók figyelmét, hogy az, amit az összeadásnál észrevettünk az egyesek és kerek tízesek összeadására vonatkozóan ($3 + 4 = 7$ és $30 + 40 = 70$),

az most nem működik. Ugyanis $3 \cdot 4 = 12$, viszont $30 \cdot 40$ már nem 120 lesz, hanem 1200.

Megjegyzés:
Ezeknek a szorzatoknak fejben történő kiszámítása azért fontos, mert segítségünkkel tudjuk majd az írásbeli szorzások és osztások eredményét becsülni.

1.3.4. A szóbeli osztás

2. évfolyam

Az osztás a négy alpművelet közül a legnehezebben értelmezhető és tanulható művelet. Az értelmezés után több, tárgyi vagy rajzos tevékenységhez kötődő osztási feladatot végzünk. Figyelni kell arra, hogy a gyerekek mind a bennfoglalásra, mind az egyenlő részekre osztásra lássanak példákat.

A bennfoglalótáblák

A bennfoglalótáblákban az osztó rögzített, az egyes bennfoglalások pedig a hányadosok növekvő sorrendjében követik egymást. Például a 8-as bennfoglalótábla:

$8 : 8 = 1$
$16 : 8 = 2$
$24 : 8 = 3$
$32 : 8 = 4$
$40 : 8 = 5$
$48 : 8 = 6$
$56 : 8 = 7$
$64 : 8 = 8$
$72 : 8 = 9$
$80 : 8 = 10$

A bennfoglalótáblákat a szorzótáblákkal párhuzamosan tanítjuk, így a tanítás sorrendje itt is többféle lehet. A bennfoglalótábla felépítését a megfelelő szorzótáblával indokoljuk, hangsúlyozva a szorzás és az osztás közötti kapcsolatot. Például: $24 : 3 = 8$, mert $8 \cdot 3 = 24$.

A 2. évfolyamon tanítjuk az olyan kétjegyű számok osztását egyjegyű osztóval, amelyek nem részei a bennfoglalótáblának. Ilyen például a $76 : 4$. Ebben az esetben a 76-t két olyan tag összegére bontjuk, melyek már szerepelnek a bennfoglalótáblákban.

Felhasználva, hogy az osztás jobbról disztributív az összeadásra nézve (lásd 1.4.4. fejezet), a hányadosokat meg tudjuk határozni.

$$76 : 4 = (40 + 36) : 4 = 40 : 4 + 36 : 4 = 10 + 9 = 19$$

Maradékos osztás

A bennfoglalótáblák megtanulása mellett foglalkozunk a megfelelő maradékos osztásokkal is.

A maradékos osztás tanítása történhet folyamatosan, az egyes bennfoglalótáblákkal együtt vagy a bennfoglalótáblák után. A 2. évfolyamon csak

a művelet elvégzésének az eddigiektől eltérő, nagyobb számok esetén alkalmazandó módja. Az írásbeli műveletet nem azért nevezzük „írásbeli”-nek, mert leírjuk, hanem azért, mert a leírást helyi értékesen végezzük.

Tekintettel arra, hogy a műveletek írásbeli algoritmussal történő elvégzése akkor gyorsabb a szóbelihez képest, ha legalább háromjegyű számokkal dolgozunk, az írásbeli műveletek tanítására 3. évfolyamtól kezdődően kerül sor.

Az alábbiakban összefoglaljuk, hogy melyek azok az előismeretek, amelyek szükségesek az írásbeli műveletek tanításának megkezdéséhez:

- természetes számfogalom
- számok helyi értéke, alaki értéke, valódi értéke
- helyiérték-táblázat
- szóbeli műveletek
- számok kerekített értéke
- becslés
- művelet és inverzének kapcsolata
- műveleti tulajdonságok
- játék pénz mint tanulást segítő eszköz

1.3.6. Írásbeli összeadás

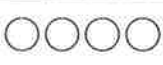
Az írásbeli összeadás tanításakor azt kell megmutatni a tanulóknak, hogy két számot úgy is összeadhatunk, hogy az egyes helyi értékeken lévő számjegyeket külön-külön összegezzük. Ezt legjobban játék pénzekkel tudjuk szemléltetni.

A fokozatosság elve szerint először olyan számok összeadását végezzük el, ahol egyetlen helyi értéken sem lesz a két számjegy összege 9-nél nagyobb.

1. példa

Anna elment a boltba vásárolni. 214 Ft-ért kenyeret, 325 Ft-ért felvágottat vett. Hány forintba került a kenyér és a felvágott összesen?

Kirakjuk játék pénzekkel az összeadás két tagját, majd a pénzerméket helyi értékenként egyesítve olvassuk le az eredményt:

	Százások	Tízesek	Egyesek
Kenyér			
Felvágott			
Összesen	5	3	9

A fenti elgondolásból kiindulva alkotjuk meg az írásbeli összeadás algoritmusát. A két összeadandót helyiérték-táblázatban egymás alá írjuk:

	sz.	t.	e.
	2	1	4
+	3	2	5
	5	3	9

Kezdetben fontos, hogy az egyes számjegyek összeadásánál a tanulók a számok alakí értéke mellé a helyi értéküket is kimondják, például 5 egyes meg 4 egyes egyenlő 9 egyessel stb. Ezzel is tudatosítjuk, hogy az összeadás helyi értéként történik.

Ezt követően olyan példát adunk, ahol egy helyi értéken (először az egyesek helyén) a két számjegy összege legalább 10. Ebben az esetben is kirakjuk játék pénzzel a két tagot, majd helyi értéként egyesítjük. Például:

	sz.	t.	e.
	2	1	8
+	5	2	6
	7	3	14
	7	4	4

Értelmezzük a keletkezett összeget: Van 7 db százaskunk, 3 db tízesünk és 14 db egyesünk. Az eddig tanultak szerint 14 db egyesből 10 db egyest beválthatunk 1 db tízessé. Így a keletkező összeg 7 db századból, (3+1) db tízesből és 4 db egyesből fog állni. Tehát ha összegben az egyesekből be tudunk váltani 10-et 1 tízesre, akkor ezt az 1 tízest már tízes helyi értéken vesszük figyelembe az összeadás során.

Megjegyzés:

Felmerülhet a kérdés, hogy az írásbeli összeadást miért a legkisebb helyi értéken kezdve, jobbról balra haladva végezzük. Figyeljük meg az előbbi példát! Az egyesek helyén lévő számjegyek összege $8 + 6 = 14$. Az előbbi gondolatmenet szerint az egyesek helyén leírjuk a 4-et, és megjegyezzük, hogy maradt még egy tízesünk, amit hozzá kell majd adni a tízesek számának összegéhez. Így $1 + 2 + 1 = 4$ lesz a tízesek száma, ezt leírjuk.

Most vizsgáljuk meg, mi lett volna, ha balról jobbra haladunk! Először összeadjuk a századok számát, ami $2 + 5 = 7$, majd leírjuk. Összeadjuk a tízesek számát, ami $1 + 2 = 3$, majd leírjuk. Végül az egyesek számát kell összeadni, ami $8 + 6 = 14$. Mivel két számjegyet nem írhatunk egy helyi értékre, leírjuk a 4-et, és az összegben eggyel megnöveljük a már korábban leírt tízesek számát. Így tehát áthúzással vagy töreléssel javítani kell, s ez áttekinthetetlenné teszi a lejegyzést.

	sz.	t.	e.
	2	1	8
+	5	2	6
	7	3	14
	7	4	4

Nézzük meg azt az esetet is, amikor a tízesek helyén álló két számjegy összege legalább 10. Például:

	sz.	t.	e.
	2	6	3
+	5	7	1
	7	13	4
	8	3	4

Az összeg most 7 db százashból, 13 db tízesből és 4 db egyesből áll. Az eddig tanultak szerint a 13 db tízesből 10 db-ot beválthatunk 1 db százásra, így a tízesek helyén 3 marad, a százások száma pedig 1-gyel nő.

Végül olyan példákat veszünk, amelyekben egyszerre több helyi értéken is történik tízesátlépés.

Megjegyzés:

- A bevezető példák után a helyiérték-táblázatot elhagyjuk, de a számokat a helyi értékeknek megfelelően írjuk egymás alá.
- Az írásbeli összeadás algoritmusát kiterjesztjük 2-nél több tagú összeadásokra is.
- Az írásbeli összeadás bevezetésére a 3. évfolyamon, az ezres számkörben kerül sor, de vigyáznunk kell arra, hogy a két vagy több háromjegyű szám összege ne érje el az 1000-et.
- 4. évfolyamon szintén tanítjuk az írásbeli összeadást, de itt már a számkörbővítéssel összhangban négyjegyű számokat is összeadunk.

A becslés szerepe

Minél több helyi értéken kell a tízesátlépés miatt beváltásokat végezni, annál inkább nő a hiba lehetősége, ezért is célszerű a művelet elvégzése előtt az eredményt megbecsülni. A becslés tanítására természetesen nem csak a hibás eredmény kiszűrése miatt kerül sor. A mindennapi életben gyakran találkozunk olyan szituációkkal, amikor elegendő egy-egy művelet pontos eredménye helyett annak közelítő értéke. Az is nagyon fontos, hogy egy-egy probléma megoldása során a kapott eredményről „ránézésre” el tudjuk dönteni, hogy reális-e vagy sem.

A becslési képesség fejlesztéséhez a műveletvégzés után a pontos eredményt mindig össze kell hasonlítani a becslült értékkel. (A becslült és a számított érték közötti elfogadható eltérés mértékére a kerekítésekkel adódó maximális eltérésekből következtethetünk.)

Az összeg becsléséhez a háromjegyű összeadandókat tízesekre vagy százásokra kerekítjük, és a kerekített számokkal szóbeli összeadást végzünk (lásd 1.3.1. fejezet).

2. példa

$395 + 278 = ?$ A művelet elvégzése előtt végezz becslést tízesekre kerekített értékekkel!

Megoldás

Becslés: $395 \approx 400$, $278 \approx 280$

A becsült érték: $400 + 280 = 680$.

Számítás: 395

$$\begin{array}{r} 395 \\ + 278 \\ \hline 673 \end{array}$$

Az összeadás ellenőrzése

Az összeg helyességét a tagok felcserélésével kapott összeadással ellenőrizzük. A kéttagú összeadás ellenőrzését azért nem az összeadás inverz műveletével, a kivonással végezzük, mert egyrészt a kivonást később tanítjuk, mint az összeadást, másrészt pedig a kivonás nehezebben elvégezhető művelet, így nem célszerű egy könnyebbet egy nehezebbel ellenőrizni.

1.3.7. Írásbeli kivonás

Az írásbeli kivonás elvégzésére több módszer is kínálkozik, például: elvétel felváltással, pótlás egyenlő változtatással. Célszerű többet megmutatni és a tanulóra bízni, hogy melyiket tartja egyszerűbbnek és jobban használhatónak.

Az írásbeli kivonásnak is megvannak a fokozatai, és ez a következő módszerek mindegyikére igaz. Először mindig olyan számokat választunk ki-sebbitendőnek és kivonandónak, hogy mindegyik helyi értéken elvégezhető legyen a kivonás tízesátlépés nélkül.

1. példa

Tominak 755 forintja van. Mennyi pénze marad, ha megveszi a 321 Ft-os játék autót?

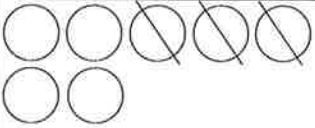
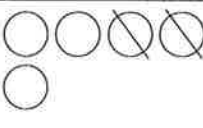
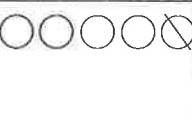
Megoldás

A különbség meghatározását kétféle eljárásra és így kétféle tevékenységre vezethetjük vissza.

a) Elvétel:

Vegyünk el 755-ből 321-et!

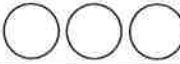
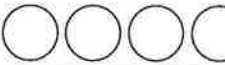
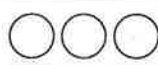
A vásárlást játsszuk el játék pénzzel! Legyen az asztalon kirakva a kisebbítendő, azaz 7 db 100-as, 5 db tízes, 5 db 1-es. Vegyünk el belőle 321-et, azaz a 3 db 100-ast, a 2 db 10-est és az 1 db 1-est. (Az elvételt a rajzon lehúzással jelöljük.) Olvassuk le, mennyi pénz maradt az asztalon!

	Százások	Tízesek	Egyesek
Tomi pénze			
Maradt	4	3	4

b) Pótlás:

Pótoljuk a 321-et 755-re!

Most a kivonandót, azaz a 3 db százast, a 2 db tízest és az 1 db egyest tesszük az asztalra. Egészítsük ki ezt a pénzt úgy, hogy megkapjuk a kisebbítendőt, a 755-öt! A 3 db százashoz még 4 db-ot kell tenni, hogy 7 db százast kapjunk, a 2 db tízeshez még 3 db-ot kell tenni, hogy 5 db tízes legyen, az 1 db egyeshez pedig még 4 db-ot kell tenni, hogy 5 db egyes legyen. (A hozzátevést a rajzon színezéssel jelöljük.) Olvassuk le, hogy mennyi pénzt tettünk még ki az asztalra!

	Százások	Tízesek	Egyesek
Tomi pénze (ezt nem rakjuk ki):	7	5	5
Az autó ára:			
Ennyivel egészítettük ki az autó árát:			

Mindkét eljárással ugyanazt a helyiérték-táblázatos felírást kapjuk:

	sz.	t.	e.
	7	5	5
-	3	2	1
	4	3	4

Ha valamelyik helyi értéken a kisebbítendőben kisebb számjegy áll, mint a kivonandóban, akkor kétféle módszer, a felváltás vagy az egyenlő változtatás módszere között választhatunk.

A felváltás módszere

A módszer lényege, hogy ha egy adott helyi értéken a kisebbítendő kisebb, mint a kivonandó, akkor a következő helyi értéken lévő számjegyből egyet felváltunk kisebb helyi értékűre, és így már el tudjuk végezni a kivonást.

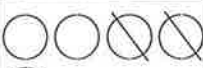
2. példa

Tominak 755 forintja van. Mennyi pénze marad, ha megveszi a 329 Ft-os játék autót?

Megoldás

Elvétel a felváltás módszerével:

Ebben az esetben a 755-ből 329-et kell elvenni. Mivel nem tudjuk az 5 db 1-esből elvenni a 9 db 1-et, felváltunk az 5 db tízesből 1-et 10 db egyesre. Ekkor 15 db egyesünk lesz, ebből már elvehetjük a 9 db egyest (A rajzon a felváltott tízest pontozással jelöljük.)

	Százások	Tízesek	Egyesek
Tomi pénze:			
Maradt:	4	2	6

Helyiérték-táblázatban felírva:

	sz.	t.	e.
	7	5 $\ominus 1$	5 $\oplus 10$
–	3	2	9
	4	2	6

Megjegyzések:

- Jelezni kell, ha a kisebbítendőben egy adott helyi értéken szereplő szám a felváltás miatt kisebb lett.
- A felváltás módszerét akkor is használhatjuk, ha a kivonást pótlásként végezzük.
- Ez az eljárás nehézkes, ha több helyi értéken van tízesátlépés. Például: A 4002 – 1113 kivonásnál az eljárás szerint nem tudunk 2 db egyesből 3-at elvenni, ezért felváltanánk a következő helyi értéken 1 tízest 10 db egyesre, viszont ott 0 van. Tehát ide is váltani kell.

	E.	sz.	t.	e.
	4 $\ominus 1$	0 $\oplus 10$ $\ominus 1$	0 $\oplus 10$ $\ominus 1$	2 $\oplus 10$
–	1	1	1	3
	2	8	8	9

Az egyenlő változtatás módszere

Ha a kisebbítendőben egy adott helyi értéken kisebb számjegy áll, mint a kivonandóban, akkor a felváltás módszere helyett az egyenlő változtatás módszerét is alkalmazhatjuk. Ehhez a kivonás műveleti tulajdonságai közül a következőt használjuk fel: a különbség nem változik, ha a kisebbítendőt és a kivonandót ugyanazzal a számmal növeljük (lásd 1.4.1. fejezet). Így most megnöveljük a kisebbítendőt és kivonandót is 10-zel, mégpedig oly módon, hogy a kisebbítendőt 10 db eggyessel, a kivonandót pedig 1 db tízessel.

3. példa

Sanyinak 453 darab bélyege van. Ebből 218 darab magyar bélyeg. Mennyi külföldi bélyege van?

Megoldás

Pótlás az egyenlő változtatás módszerével:

Ebben az esetben a 218-at kell 453-ra pótolni. Mivel nem tudjuk a 8 db egyesre 3 db egyesre pótolni, 10-zel több, azaz 13 egyesre pótoljuk. Ezáltal a kisebbítendőt 10 db eggyessel megnöveltük. Ahhoz, hogy a különbség ne változzon, megnöveljük 1 db tízzel a kivonandót is. A következő lépésben ezért nem 1, hanem 2 db tízest fogunk pótolni 5 db tízesre.

Helyiérték-táblázatban felírva:

	sz.	t.	e.
	4	5	3 ⁽⁺¹⁰⁾
–	2	1 ⁽⁺¹⁾	8
	2	3	5

Megjegyzések:

- Az egyenlő változtatás módszerét természetesen akkor is alkalmazhatjuk, ha nem vagy nem csak az egyesek helyi értékén van tízesátlépés.
- Kezdetben célszerű jelölni, hogy melyik helyi értéken adtunk hozzá a kisebbítendőhöz és a kivonandóhoz.
- Az egyenlő változtatás módszerét akkor is alkalmazhatjuk, ha a kivonást elvételtként értelmezzük.
- 3. évfolyamon háromjegyű, 4. évfolyamon pedig már négy- vagy akár többjegyű számokkal is végzünk írásbeli kivonást.

Becslés és ellenőrzés

Becslést az összeadáshoz hasonlóan kivonás előtt is végzünk. A kivonás eredményének helyességét ellenőrizhetjük összeadással vagy kivonással.

- Összeadással: Ha a különbséghez hozzáadjuk a kivonandót, akkor megkapjuk a kisebbítendőt. Például: az $528 - 397 = 131$ kivonás ellenőrzése: $131 + 397 = 528$.
- Kivonással: Ha a kisebbítendőből kivonjuk a különbséget, akkor megkapjuk a kivonandót. Például: $528 - 130 = 397$.

1.3.8. Írásbeli szorzás egyjegyű és kétjegyű szorzóval

Szorzás egyjegyű szorzóval

Először olyan példát mutatunk, ahol egyik helyi értéken sem történik tízesátlépés.

1. példa

Zoli előrelátó, és iskolai baleset-biztosítást köt. Ennek havi díja 213 forint. Mennyit fizet egy negyedév alatt?

Megoldás

Egy negyedév 3 hónapból áll, tehát, hogy megtudjuk, mennyit fizet 3 hónap alatt, ahhoz a 213-at meg kell szoroznunk 3-mal.

A szorzást ismételt összeadásként értelmezve először írásbeli összeadással kiszámoljuk a $213 + 213 + 213$ összeget.

sz.	t.	e.
2	1	3
2	1	3
2	1	3
6	3	9

 →

sz.	t.	e.
2	1	3
· 3		
6	3	9

Mivel minden helyi értéken azonos számjegyek szerepelnek, összeadás helyett célszerű szorozni. Jelen példánkban a szorzó 3, a szorzandó 213. A szorzandóban az egyesek helyén 3 áll, tehát 3-szor 3 egyes az 9 egyes. A tízesek helyén 1 áll, 3-szor 1 tízes az 3 tízes. Legvégül a százások helyén álló 2-t kell 3-szor venni, azaz 3-szor 2 százás az 6 százás.

Megjegyzések:

- Amennyiben még szükséges, az egyenlő tagok összeadását szemléltessük játék pénzekkel.
- Viszonylag kevés olyan többjegyű számot tudunk egyjegyű szorzóval szorozni, ahol minden helyi értéken a keletkező szám egyjegyű marad, azaz sehol sem lesz tízesátlépés.

A következő fokozat olyan többjegyű szám szorzása egyjegyű szorzóval, ahol az egyesek helyén történik tízesátlépés. Például: $218 \cdot 3 = ?$ A szorzást helyi értékenként, a legkisebb helyi értéktől indulva végezzük. Amikor a 8 db egyest szorozzuk 3 db egyessel, a szorzat 24 db egyes lesz. Ebből 20 db-ot beváltunk 2 db tízesre, és ezt hozzáadjuk a tízes helyi értéken lévő szám 3-szorosához.

Ezt természetesen sokkal rövidebben írjuk, mert az átváltásból adódó tízesek számát csak fejezzük meg.

sz.	t.	e.	
2	1	8	· 3
6	3	24	
	2		
6	5	4	

sz.	t.	e.	
2	1	8	· 3
6	5	4	

Az algoritmus megértése után a helyiérték-táblázatot már nem vesszük fel, de a helyi érték szerinti írásmódra változatlanul figyelünk.

Ezt követően olyan példákat adunk, ahol a tízesek, majd a százask helyén történik tízesátlépés.

Végül általános esetben olyan szorzásokat végzünk, amelyeknél több helyi értéken is előfordul tízesátlépés. Például: $368 \cdot 7 = ?$ Ahogy az előbbi példánál láttuk, most is megteesszük a szükséges beváltásokat az egyesektől indulva:

E.	sz.	t.	e.	
	3	6	8	· 7
		42	56	
		5		
	21	47	6	
	4			
	25	7	6	
2				
2	5	7	6	

Rövidebben, a szükséges váltásokat fejben tartva vagy az ujjakkal mutatva:

E.	sz.	t.	e.	
	3	6	8	· 7
2	5	7	6	

Megjegyzés:

- A beváltásokat, amennyiben szükségesnek látjuk, kezdetben még szemléltessük játék pénzekkel!
- A 3. évfolyamon olyan szorzásokat végzünk, ahol a szorzat nem nagyobb 1000-nél. 4. évfolyamon a szorzandó már lehet négyjegyű szám is.

Becslés, ellenőrzés

A szorzat becslését a szorzandó kerekített értékével végezzük, változatlanul hagyva az egyjegyű szorzót. Például a $368 \cdot 7$ szorzat becslült értéke a szorzandót százakra kerekítve $400 \cdot 7 = 2800$, a szorzandót tízesre kerekítve $370 \cdot 7 = 2590$. A szorzás ellenőrzése ismételt összeadással történhet.

Szorzás kétjegyű szorzóval

Az általános írásbeli algoritmust a 10-zel, majd a kerek tízessel történő szorzással készítjük elő.

Ha egy számot 10-zel szorzunk, akkor a szorzandó minden számjegye 1-gyel nagyobb helyi értékre kerül, az egyesek helyén pedig 0 lesz, azaz minden számjegyet egy helyi értékkel balra léptetünk. Például: a 187-et 10-zel szorozva a 7 db egyesből 70 db egyes lesz, ami 7 db tízes és 0 db egyes. A tízesekből van 8 db, ezt megszorozva 10-zel, 80 db tízes lesz, ami éppen 8 db százaz. Az 1 db százazból 10 db százaz lesz, ami 1 db ezres.

E.	sz.	t.	e.	
1	8	7		· 10
10	80	70		
1	8	7	0	

A kerek tízes szorzó felbontható egy egyjegyű szám és a 10 szorzatára. Így ezt a feladatot vissza tudjuk vezetni az előző esetre. Például: a 187-et 20-szal úgy is szorozhatjuk, hogy előbb megszorozzuk 2-vel, majd 10-zel. Ez utóbbi egy helyi értékkel történő balra léptetést jelent.

E.	sz.	t.	e.	
1	8	7		· 20
3	7	4	0	

Ha a szorzó teljes kétjegyű szám, akkor felbontjuk tízesekre és egyesekre. A tízesekkel és az egyesekkel a szorzást külön elvégezzük, majd összeadjuk a részletszorzatokat. Ennél a lépésnél felhasználjuk azt a műveleti tulajdonságot, hogy a szorzás disztributív az összeadásra nézve (lásd 1.4.4. fejezet).

2. példa

Szorozzuk meg a 18-at 24-gyel!

Megoldás

$24 = 20 + 4$, tehát a $24 \cdot 18 = (20 + 4) \cdot 18 = 20 \cdot 18 + 4 \cdot 18$.

Mivel az összeg tagjai felcserélhetők, azaz $20 \cdot 18 + 4 \cdot 18 = 4 \cdot 18 + 20 \cdot 18$, két lehetőség közül választhatunk:

- A szorzó tízeseivel kezdjük a szorzást (2 tízessel), utána folytatjuk az egyeseivel (4 egyessel).

			szorzás iránya	
			→	
sz.	t.	e.	t.	e.
	1	8	·	2 4
	3	6 0	← 18-nak 20-szorosa	
+		7 2	← 18-nak 4-szerese	
	4	3 2		

- A szorzó egyeseivel kezdjük a szorzást (4 egyessel), utána folytatjuk a tízeiseivel (2 tízessel).

			szorzás iránya	
			←	
sz.	t.	e.	t.	e.
	1	8	·	2 4
		7 2	← 18-nak 4-szerese	
+	3	6 0	← 18-nak 20-szorosa	
	4	3 2		

Az írásbeli szorzás algoritmusának megértése és helyes alkalmazása után az írásmódot egyszerűsítjük:

- Amikor a tízesekkel szorzunk, nem írjuk ki a léptetést jelölő, azaz a helypótló nullákat.
- A helyiérték-táblázatot elhagyjuk, de arra változatlanul ügyelünk, hogy az egyes számjegyek a helyi értéküknek megfelelően kerüljenek egymás alá.

Ennek megfelelően, ha a szorzást a szorzó

- tízes helyi értékű számjegyével kezdjük, akkor a második részletszorzat az elsőhöz képest egy helyi értékkel jobbra tolódik,
- egyes helyi értékű számjegyével kezdjük, akkor a második részletszorzat az elsőhöz képest egy helyi értékkel balra tolódik. Például:

		1	8	·	2	4
		7	2			
+	3	6				
	4	3	2			

- Egyszerűsíti az írásmódot, ha nem ragaszkodunk ahhoz, hogy a szorzandó helyi értékei összhangban legyenek a szorzat helyi értékeivel. Elegendő arra figyelni, hogy a két részletszorzat egymáshoz képest megfelelő irányba tolódjon el.

Ha a szorzást a tízesekkel kezdjük, akkor a következőképpen járhatunk el:

		1	8	·	2	4			
		3	6						
	+		7	2					
		4	3	2					

- Ha a szorzó egyik számjegye 1, célszerű azzal kezdeni a szorzást, mert ekkor nem szükséges leírni az első részletszorzatot, hiszen az megegyezik a szorzandóval. Például:

			3	4	·	3	1					3	4	·	1	3
+	1	0	2									+	1	0	2	
	1	0	5	4									4	4	2	

- Ha a háromjegyű szorzó középső számjegye 0, akkor nem egy, hanem két helyi értékkel toljuk el a következő részletszorzatot. Ugyanis, amikor a középső, 0 számjeggyel szorozzuk a szorzandó egyes helyi értékein lévő számokat, akkor minden esetben 0-t kapunk. Tehát ez a részletszorzatunk nulla lesz, az összeadás eredményét nem fogja befolyásolni, ezért nem szükséges kiírni, elegendő, ha a következő részletszorzatot még egy helyi értékkel eltoljuk. Például:

		2	3	4	·	2	0	3		
		4	6	8						
			0	0	0					
	+			7	0	2				
		4	7	5	0	2				

Becslés, ellenőrzés

A szorzat becslését úgy végezzük, hogy a szorzandót tízesekre vagy százatokra kerekítjük, a kétjegyű szorzót pedig tízesekre. Például a $34 \cdot 31$ szorzat becslült értéke $30 \cdot 30 = 900$.

A szorzat helyességét úgy ellenőrizhetjük, hogy ismételten elvégezzük a szorzást vagy a szorzó másik helyi értékén kezdve, vagy a tényezőket felcserélve.

1.3.9. Írásbeli osztás egyjegyű és kétjegyű osztóval

A négy alpművelet közül a legnehezebben elvégezhető művelet az osztás. Igaz ez az írásbeli osztásra is. Megértéséhez mindenképpen szükséges vizsgatérni a tárgyi tevékenységekhez, elsősorban a játék pénzekkel történő kirakásokhoz.

A becslés módja az írásbeli osztásnál más, mint a másik három műveletnél, ezért az eddig követett tárgyalásmódtól eltérően már az osztási algoritmus ismertetése során foglalkozunk vele.

A hányados ellenőrzése szorzással történik, felhasználva azt, hogy a szorzás az osztás inverz művelete. Az osztás és a szorzás közötti kapcsolatot nemcsak a művelet elvégzését követő ellenőrzésnél, hanem már az algoritmus lépéseinél is felhasználjuk.

Osztás egyjegyű osztóval

Az írásbeli osztást a 4. évfolyamon tanítjuk, így az osztandó három- vagy négyjegyű szám lehet. Első lépésben olyan számot osztunk el, amelyben minden számjegy osztható az osztóval.

1. példa

Anna, Bernadett és Cecil testvérek. Közös gyűjtötték a papírt, amit leadtak a hulladékhasznosító telepen. A kapott 639 Ft-ot igazságosan osztották el. Mennyi pénzt kaptak fejenként?

Megoldás

Becslés: Meghatározzuk azt a két kerek százast, amelyek közé esik az osztandó, és amelyek oszthatók az osztóval: $600 < 639 < 900$, ezért a hányados $600 : 3 = 200$ -nál nagyobb, $900 : 3 = 300$ -nál kisebb lesz.

Az asztalra kihelyezzük a 6 db százast, 3 db tízes és 9 db egyes játék pénzt. Mivel mind a három címlet osztható 3-mal, ezért mindegyiket külön-külön tudjuk harmadolni. Így fejenként jut 2 db százast, 1 db tízes és 3 db egyes, azaz 213 Ft. A 213 Ft megfelel a becslésnek, mert $200 < 213 < 300$.

Az osztás lejegyzése helyiérték-táblázattal:

$$\begin{array}{c|c|c} \text{sz.} & \text{t.} & \text{e.} \\ \hline 6 & 3 & 9 \end{array} : 3 = \begin{array}{c|c|c} \text{sz.} & \text{t.} & \text{e.} \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Ellenőrzés:

$$\begin{array}{c|c|c} \text{sz.} & \text{t.} & \text{e.} \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 6 & 3 & 9 \end{array} \cdot 3$$

Megjegyzés:

Az írásbeli osztás algoritmusát az osztást egyenlő részekre osztásként értelmező tevékenységgel készítjük elő, de ezt követően a műveletvégzés során már nem teszünk különbséget a kétféle (egyenlő részekre osztás, bennfoglalás) értelmezés között, felhasználjuk azt a korábbi tapasztalatot, hogy mindkét értelmezés ugyanarra a hányadosra vezet.

A következő lépésben olyan osztást adunk, ahol az első és/vagy a második helyi értéken álló számjegy nem osztható az osztóval, és így ott maradék keletkezik. Arra is vigyázunk, hogy a legnagyobb helyi értéken álló számjegy ne legyen kisebb az osztónál.

2. példa

Osszuk el az 525-öt 3-mal!

Megoldás

Becslés: $300 < 525 < 600$, $300 : 3 = 100$, $600 : 3 = 200$. Tehát a hányados 100 és 200 közötti szám.

Az eljárást játék pénzzel szemléltetve:

Az 5 db százastól mindenkinek jut 1-1 db, de 2 db százast már nem tudunk 3-felé osztani, ezért azokat felváltjuk tízesekre. Az így kapott 20 db tízeshez hozzáadjuk a 2 db tízest. Ebből a 22 db tízesből mindenkinek jut 7 db és

marad 1 db. Ezt az 1 db tízest felváltjuk egyesekre. Így 15 db egyesünk lesz, amiből mindenki kap 5 db-ot. Mindhárom gyerek kap tehát 1 db százast, 7 db tízest és 5 db egyest, azaz 175 Ft-ot. A 175 megfelel a becslésünknek, hiszen 100 és 200 között van.

Az írásbeli osztást általánosan az alábbi eljárás szerint végezzük:

A legnagyobb helyi értékű számot elosztjuk az osztóval, visszaszorzással és kivonással megállapítjuk a maradékot. Példánkban: 5 százast osztva 3-mal egyenlő 1 százassal, mert 1 százast szorozva 3-mal az 3 százast. Az 5 százastól kivonva 3 százast, 2 százast marad.

A keletkező maradékkal és az osztandó következő számjegyével újabb kétjegyű számot képezünk, és ezt ismét elosztjuk az osztóval. Példánkban: Az előző lépésben keletkezett 2 százast maradék az osztandó 2 tízesével együtt 22 tízes, ezt osztva 3-mal, 7 tízest kapunk, a maradék pedig 1 tízes lesz.

Az itt keletkező maradékkal és az osztandó következő számjegyével elvégezzük az eljárás előbbi lépését. Példánkban: Az előző lépésben keletkező 1 tízes maradék az osztandó 5 egyesével együtt 15 egyes, ezt osztva 3-mal 5 egyest és 0 maradékot kapunk.

Az írásbeli osztás lejegyzésének módja először helyiérték-táblázattal történik:

sz.	t.	e.				sz.	t.	e.
5	2	5	:	3	=	1	7	5
-3								
2	2							
-2	1							
	1	5						
	-1	5						
		0						

A fenti számolást sokkal rövidebben írjuk, ugyanis a visszaszorzásnál a maradék kiszámítását pótlással fejben végezzük, és csak a maradékot írjuk le:

$$\begin{array}{r}
 5 \ 2 \ 5 : 3 = 1 \ 7 \ 5 \\
 \underline{2 \ 2} \\
 1 \ 5 \\
 \underline{ 0}
 \end{array}$$

A hányados ellenőrzése: $175 \cdot 3 = 25$.

Megjegyzés:

Az eddig tanult írásbeli műveleteknél a legkisebb helyi érték felől haladtunk a nagyobb felé, most azonban az osztást fordítva, a legnagyobb helyi értékű számjeggyel kezdjük.

Külön kitérünk arra az esetre, amikor az osztandó első számjegye kisebb az osztónál. A fent leírt algoritmus változatlanul alkalmazható, de fel kell hívnunk a figyelmet arra, hogy ekkor a hányados kétjegyű szám lesz.

3. példa

Osszuk el a 174-et 3-mal!

Megoldás

Becslés: $0 < 174 < 300$, tehát a hányados 0 és 100 közé esik. Ez azt jelenti, hogy a hányados nem három-, hanem csak kétjegyű szám lesz.

Az 1 db százast 3-mal osztva 0-t kapunk, tehát a hányadosban a százaskok száma 0, ezt nem írjuk ki.

$$\begin{array}{r} 1 \ 7' \ 4' : 3 = 5 \ 8 \\ -1 \ 5 \\ \hline 2 \\ -2 \ 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Rövidebb írásmódban:

$$\begin{array}{r} 1 \ 7' \ 4' : 3 = 5 \ 8 \\ 2 \ 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

Megjegyzés:

Azt, hogy a hányados hány jegyű lesz, a százaskok helyén álló számjegy és az osztó összehasonlításával is megállapíthatjuk: ha a százaskok helyén álló számjegy kisebb, mint az osztó, a hányados kétjegyű lesz. A hányados számjegyeinek helyét kipontozással is jelölhetjük.

Célszerű olyan osztást is bemutatni, amelynél a hányados valamelyik helyi értékére 0 kerül.

4. példa

Osszuk el az 1442-t 7-tel!

Megoldás

Az előbbi megfontolást követve, mivel az ezresek helyén álló számjegy kisebb, mint az osztó, a hányados háromjegyű lesz.

$$\begin{array}{r}
 1 \ 4' \ 4' \ 2' : 7 = 2 \ 0 \ 6 \\
 0 \ 4 \\
 4 \ 2 \\
 0
 \end{array}$$

Gyakori hiba, hogy a tanulók a 4 tízest 7-tel osztva, a kapott 0 tízest a hányados tízes helyi értékére nem írják le, és így 206 helyett 26-ot kapnak. A hiba elkerülhető, ha az osztás előtt a hányados számjegyeinek számát meghatározzuk.

Az eddigi osztások mind olyanok voltak, hogy az osztandó osztható volt az osztóval. A természetes számok körében többször előfordul, hogy osztáskor maradék keletkezik. Például a $826 : 5$ osztást elvégezve a hányados 165, a maradék 1.

$$\begin{array}{r}
 8' \ 2' \ 6' : 5 = 1 \ 6 \ 5 \\
 3 \ 2 \\
 2 \ 6 \\
 1
 \end{array}$$

Az ellenőrzést ekkor úgy végezzük, hogy a hányadost visszaszorozzuk az osztóval, majd a szorzatukhoz hozzáadjuk a maradékot. Az így kapott szám az osztandó: $165 \cdot 5 + 1 = 825 + 1 = 826$.

Osztás kétjegyű osztóval

A bemutatott osztási algoritmust alkalmazzuk akkor is, amikor többjegyű az osztó, bár a hányados egyes helyi értékein keletkező számok megállapítása jóval nagyobb nehézséget jelent. Alsó tagozaton a kétjegyű számmal való osztás csak kiegészítő anyagként jelenik meg.

5. példa

Osszuk el a 2688-at 24-gyel!

Megoldás

Mind az osztandó, mind az osztó nagysága miatt nehéz viszonylag pontos becslést adni, ezért csak a hányados számjegyeinek a számát határozzuk meg: Ha az osztandó első két számjegyéből képzett kétjegyű szám kisebb az osztónál, akkor a hányados kettővel, különben csak eggyel lesz kevesebb

jegyű, mint az osztandó. Mivel $26 > 24$, példánkban a hányados háromjegyű szám lesz.

$$\begin{array}{r} 2 \quad 6' \quad 8' \quad 8' : 2 \quad 4 = 1 \quad 1 \quad 2 \\ \underline{-2 \quad 4} \\ 2 \quad 8 \\ \underline{-2 \quad 4} \\ 4 \quad 8 \\ \underline{-2 \quad 8} \\ 0 \end{array}$$

Rövidebb formában:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 6' \quad 8' \quad 8' : 2 \quad 4 = 1 \quad 1 \quad 2 \\ 2 \quad 8 \\ 4 \quad 8 \\ 0 \end{array}$$

1.4. A műveletek kapcsolata, műveleti tulajdonságok

A műveletek közötti kapcsolatoknak és a műveletek tulajdonságainak megismerése a műveletek értelmezését és a számfogalom elmélyítését is segíti. A felfedezett összefüggések teszik lehetővé a szóbeli és írásbeli számolási algoritmusok megértését, a műveletvégzés egyszerűsítését.

Az egyes tulajdonságok felfedeztetését a mindennapi életből vett példákkal kezdjük, majd tárgyi tevékenységekkel támasztjuk alá. Az irányított felfedeztetést egyre bővebb számkörbe tartozó számokkal, egymásra épülő, egymással összefüggő számfeladatokkal (feladatcsokrokkal) folytatjuk. A felismert összefüggések megfogalmazását csak konkrét számokra vonatkozóan várjuk el, és azt is csak a 3–4. évfolyamon.

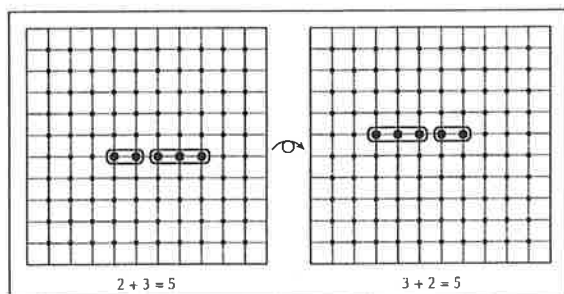
1.4.1. Az összeadás és a kivonás tulajdonságai

Felcserélhetőség (kommutativitás)

Az összeadás tagjainak sorrendje felcserélhető

Ezt a műveleti tulajdonságot az összeadás értelmezésére támaszkodó példákkal szemléltetjük. Az összeadást egyesítésként értelmezve a tagok felcserélhetősége közvetlenül következik.

- Ha Peti a boltban belenéz édesanyja bevásárlókosarába és lát benne 2 db almát meg 3 db körtét, akkor ő ebből nem tudja meg, hogy édesanyja előbb rakta be a 2 almát és csak utána a 3 körtét vagy fordítva. A kosár tartalmán ez nem látszik. Összeadással kifejezve: $2 + 3 = 3 + 2$.
- 2 piros és 3 kék korongot egymás mellé téve, a képről két összeadás olvasható le: előbb balról jobbra ($2 + 3$), majd fordítva jobbról balra ($3 + 2$) haladva.
- Szöges-lyukas táblán tűzzünk ki egymás mellé először 2, majd 3 szöveget, és gumizzuk össze őket külön-külön. A tábla képe ekkor a $2 + 3$ összeadásnak felel meg. Majd anélkül, hogy változtatnánk a szögek számán, elfordítjuk a táblát 180 fokkal. Most a tábláról a $3 + 2$ összeadás olvasható le. (1.34. ábra)



1.34. ábra

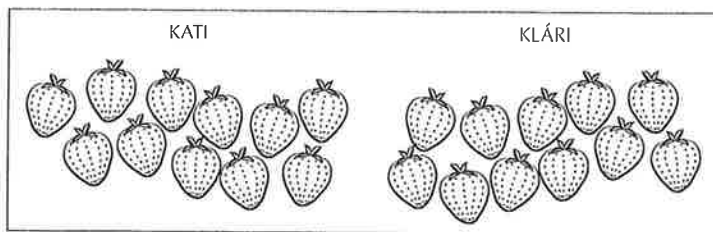
A kisebbítendő és a kivonandó sorrendje nem cserélhető fel

Ez a kivonás értelmezéséből rögtön következik, hiszen a természetes számok körében el sem végezhető olyan kivonás, amelynél a kisebbítendő kisebb, mint a kivonandó.

Ugyanakkor a kivonandók sorrendje felcserélhető. Ezt a tulajdonságot a kivonás elvételként való értelmezésével láthatjuk be. Mivel a halmazban nincs kitüntetett szerepük az elemeknek – nincsenek sorrendben –, így mindegy, hogy milyen sorrendben vesszük el őket.

1. példa

Két testvér, Kati és Klári tízóraira 11-11 szem epret vitt magával. Kati az első szünetben 6-ot, a második szünetben 3-at evett meg. Klári fordítva: előbb 3-at, utána 6-ot. Hány szem epre maradt a lányoknak a harmadik szünetre? Színezd ki! (1.35. ábra)



1.35. ábra

Megjegyzés:

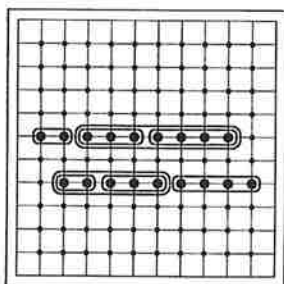
A kivonandók felcserélhetőségét a megfelelő összeadás tagjainak felcserélhetőségére is visszavezethetjük: például a $11 - 6 - 3 = 11 - 3 - 6$ következik abból, hogy egyrészt $11 - 6 - 3 = 2$, mert $2 + 3 + 6 = 11$, másrészt $11 - 3 - 6 = 2$, mert $2 + 6 + 3 = 11$.

Csoportosíthatóság (asszociativitás)

Az összeadás tagjai tetszőlegesen csoportosíthatók

Ha az összeadás kettőnél több tagú, akkor a tagok tetszőlegesen csoportosíthatók. Például: $6 + (4 + 7) = (6 + 4) + 7$.

Az összefüggést szöges-lyukas táblán úgy szemléltetjük, hogy egymás mellé kítűzünk 2, 3 és 4 szöget. Először a két utóbbit, majd a két előbbit gumizzuk össze. Mindkét esetben leolvassuk az összeadásokat. Mivel a szögek számát nem változtattuk, csak a gumit helyeztük át, a két összeg megegyezik. (1.36. ábra)



1.36. ábra

Az összeadás asszociatív és kommutatív tulajdonságát felhasználjuk például egy műveletsor kiszámításának egyszerűsítésére.

2. példa

Számítsd ki ügyesen: $8 + 3 + 6 + 2 + 7 = ?$

Megoldás

A számítás gyorsabb lesz, ha nem balról jobbra haladva a felírt sorrendben számolunk, hanem a tagok felcserélésével és megfelelő csoportosításával a fenti összeadás helyett a $(8 + 2) + 6 + (3 + 7) = 10 + 6 + 10 = 26$ összeadást végezzük el. Számolásunk helyességét ellenőrizhetjük úgy, hogy az eredeti sorrendben is kiszámoljuk az összeget.

A kivonás nem asszociatív művelet

A kivonásban szereplő tagokat az összeadástól eltérően nem lehet szabadon átzárójelezni, mert megváltozik a műveletsor eredménye. Számítsuk ki például a $11 - 6 - 3$ kivonást kétféle zárójelezéssel: $(11 - 6) - 3 = 2$, ugyanakkor $11 - (6 - 3) = 8$.

Az összeg változásai

- Ha megváltoztatjuk az egyik tagot valamennyivel, miközben a másikat változatlanul hagyjuk, akkor az összeg is ugyanolyan irányban ugyanannyival változik. Például:

$$\begin{array}{rclclcl} 5 & + & 6 & = & 11 & & 5 & + & 6 & = & 11 \\ & & \downarrow +1 & & \downarrow +1 & & \downarrow +1 & & \downarrow +1 & & \\ 5 & + & 7 & = & 12 & & 6 & + & 6 & = & 12 \end{array}$$

Ha az összeadás egyik tagját 1-gyel növeljük, miközben a másik tagot változatlanul hagyjuk, az összeg is 1-gyel nő.

3. példa

Mennyivel változik az összeg? Hasonlítsd össze az egymás alatt lévő összeadásokat!

$$\begin{array}{rclclcl} 20 & + & 12 & = & 32 & & 13 & + & 16 & = & 29 \\ & & \downarrow +3 & & \downarrow +3 & & \downarrow +7 & & \downarrow +7 & & \\ 20 & + & 15 & = & ? & & 20 & + & 16 & = & ? \end{array}$$

- Ha a két tagot ugyanannyival, de ellentétes irányban változtatjuk, akkor az összeg nem változik. Például:

$$\begin{array}{rcl} 9 & + & 8 & = & 17 \\ \downarrow +3 & & \downarrow -3 & & \\ 12 & + & 5 & = & 17 \end{array}$$

Ha az összeadás egyik tagját 3-mal növeljük, a másikat pedig 3-mal csökkentjük, az összeg nem változik.

Megjegyzés:

Ezt a tulajdonságot felhasználva két szám szóbeli összeadását úgy is végezhetjük, hogy az egyik számot kerek tízessé alakítjuk, és ezt a változtatást a másik számon „jótésszük”. Például:

$$27 + 38 = (27 + 3) + (38 - 3) = 30 + 35 = 65.$$

Hívják ezt a módszert TEVE módszernek is, mert TESzek, VEszek. Hozzá is tettem, meg el is vettem, tehát nem változtattam meg az eredményt.

A különbség változásai

- Ha valamennyivel megváltoztatjuk a kisebbítendőt, miközben a kivonandót változatlanul hagyjuk, akkor a különbség is ugyanannyival, ugyanolyan irányban változik. Például:

$$\begin{array}{rcl} 30 & - & 13 & = & 17 \\ \downarrow -10 & & \downarrow -10 & & \\ 20 & - & 3 & = & 17 \end{array}$$

Ha a kisebbítendőt 10-zel csökkentjük, miközben a kivonandó változatlan, a különbség is 10-zel csökken.

- Ha valamennyivel megváltoztatjuk a kivonandót, miközben a kisebbítendőt változatlanul hagyjuk, akkor a különbség ugyanannyival, de ellentétes irányban változik. Például:

$$\begin{array}{rcl} 30 & - & 13 & = & 17 \\ & \downarrow -3 & \downarrow +3 & & \\ 30 & - & 10 & = & 20 \end{array}$$

Ha a kisebbítendőt változatlanul hagyva a kivonandót 3-mal csökkentjük, akkor a különbség 3-mal nagyobb lesz.

- Ha a kisebbítendő és a kivonandó ugyanannyival, azonos irányban változik, akkor a különbség változatlan marad. Például:

$$\begin{array}{rcl} 7 & - & 3 & = & 4 \\ \downarrow +10 & & \downarrow +10 & & \\ 17 & - & 13 & = & 4 \end{array}$$

Megjegyzés:

Ezt a tulajdonságot használhatjuk a különbség kiszámításának megkönnyítésére úgy, hogy az egyik számot kerek tízessé alakítjuk. Például ha 97-ből kell kivonni 59-et, akkor inkább megnöveljük mindkét számot 1-gyel: $97 - 59 = 98 - 60 = 38$.

1.4.2. A szorzás és az osztás tulajdonságai

Felcserélhetőség (kommutativitás)

A szorzás tényezőinek sorrendje felcserélhető

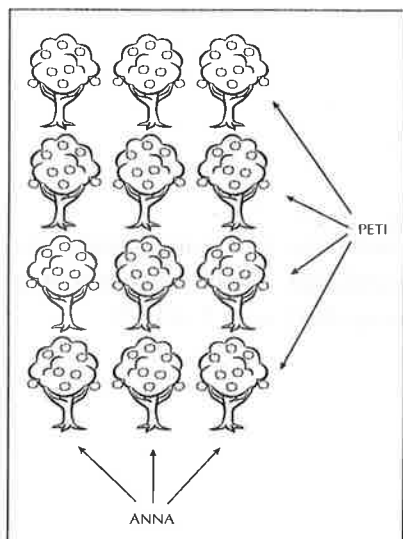
Ha a szorzást halmazok direkt szorzatának segítségével értelmezzük, a tényezők felcserélhetősége közvetlenül belátható. Azonban a szorzatot egyetlen tagok összegeként értelmezve a két tényező, a szorzó és a szorzandó szerepe eltérő. Például

$$3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2$$

$$2 \cdot 3 = 3 + 3$$

A hétköznapi életben is előfordul, hogy különbséget teszünk a két szorzás között. Például nem mindegy, hogy egy gyógyszerből naponta 3-szor kell 2 tablettát bevenni, vagy 2-szer 3-at.

Ha a szorzást ismételt összeadásnak tekintjük, akkor a szorzótényezők felcserélhetőségét az elemek sorokba és oszlopokba rendezésével szemléltethetjük.



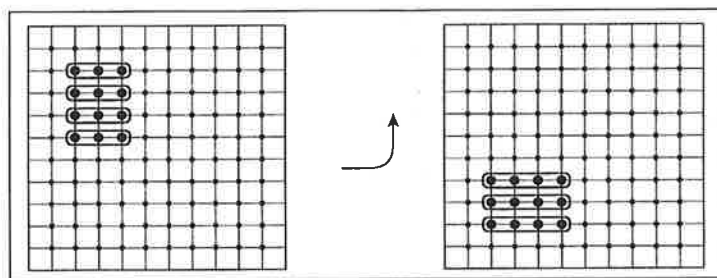
1.37. ábra

– Például egy kertben 12 barackfát a következőképpen rendeznek el (1.37. ábra):

Peti 4 sorban lát fákat, soronként 3-at, azaz $4 \cdot 3$ -at. Anna 3 sorban lát fákat, soronként 4-et, azaz $3 \cdot 4$ -et. Mindketten ugyanazokat a fákat látják, mindketten 12-t.

Tehát $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$.

- A szöges-lyukas táblán kitűzünk 4 sorban soronként 3, azaz $4 \cdot 3$ szöget, majd a táblát elforgatjuk 90 fokkal. A szögek száma nem változik, viszont most 3 sorban 4-4 szöget, azaz $3 \cdot 4$ -et látunk.



1.38. ábra

Az osztandó és az osztó sorrendje nem cserélhető fel

Ezt a szorzótényezők felcserélhetőségére a következőképpen vezethetjük vissza. Például:

$20 : 2 : 5 = 2$, mert $2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$ és $20 : 5 : 2 = 2$, mert $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

Csoportosíthatóság (asszociativitás)

A szorzás tényezői tetszőlegesen csoportosíthatók

A tényezők csoportosíthatóságáról akkor beszélhetünk, ha a szorzótényezők száma kettőnél több.

1. példa

Andi és Edit adventi koszorúkat készít. Mindketten 3-at készítenek. Hány gyertyát kell venniük?

Megoldás

Egy adventi koszorún 4 db gyertya van. Mindketten 3 koszorút készítenek, így egy személynek $3 \cdot 4$ db gyertyára van szüksége. Mivel azonban ketten vannak, ezért a $3 \cdot 4$ db gyertyából kétszer ennyi kell, azaz $2 \cdot (3 \cdot 4)$.

Másik gondolatmenettel:

Mindketten 3-3 koszorút készítenek, ez $2 \cdot 3$ darab. Egy koszorúra 4 gyertya kerül, tehát összesen $(2 \cdot 3) \cdot 4$ gyertyát kell venni.

A kétféle okoskodás ugyanarra az eredményre vezet, tehát $2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$.

Az osztás nem asszociatív művelet

Az osztásban szereplő tényezőket a szorzástól eltérően nem lehet szabadon csoportosítani, mert megváltozik az eredmény. Számítsuk ki például a $40 : 10 : 2$ osztást kétféle zárójelezéssel: $(40 : 10) : 2 = 4 : 2 = 2$, $40 : (10 : 2) = 40 : 5 = 8$.

Megjegyzés:

A legtöbb esetben az átzárójelezéssel kapott osztás el sem végezhető a természetes számok körében. Például $(20 : 2) : 5 = 2$, átzárójelezés után $20 : (2 : 5)$ -öt kapunk.

A szorzat változásai

- Ha megváltoztatjuk az egyik tényezőt valahányszorosára, miközben a másikat változatlanul hagyjuk, akkor a szorzat is ugyanolyan irányban ugyanannyiszorosára változik. Például:

$$\begin{array}{rclclcl} 3 & \cdot & 4 & = & 12 & & 3 & \cdot & 4 & = & 12 \\ \downarrow \cdot 3 & & & & \downarrow \cdot 3 & & & & \downarrow \cdot 3 & & \downarrow \cdot 3 \\ 9 & \cdot & 4 & = & 36 & & 3 & \cdot & 12 & = & 36 \end{array}$$

Ha a szorzat egyik tényezőjét 3-szorosára növeljük, miközben a másik tényezőt változatlanul hagyjuk, a szorzat is 3-szorosára nő.

- Ha a két tényezőt ugyanannyiszorosára, de ellentétes irányban változtatjuk, akkor a szorzat nem változik. Például:

$$\begin{array}{rclclcl} 6 & \cdot & 4 & = & 24 & & \text{Ha az egyik tényezőt 2-szeresére növeljük,} \\ \downarrow \cdot 2 & & \downarrow : 2 & & & & \text{a másikat pedig felére csökkentjük, a szorzat} \\ 12 & \cdot & 2 & = & 24 & & \text{nem változik.} \end{array}$$

A hányados változásai

- Ha valahányszorosára (valahányad részére) megváltoztatjuk az osztandót, miközben az osztót változatlanul hagyjuk, akkor a hányados is ugyanannyiszorosára (ugyanannyiad részére) ugyanolyan irányban változik. Például:

$$\begin{array}{rclclcl} 100 & : & 25 & = & 4 & & \text{Ha az osztandót 2-szeresére növeljük,} \\ \downarrow \cdot 2 & & & & \downarrow \cdot 2 & & \text{közben az osztót változatlanul hagyjuk, a} \\ 200 & : & 25 & = & 8 & & \text{hányados is 2-szeresére nő.} \end{array}$$

- Ha valahányszorosára (valahányad részére) megváltoztatjuk az osztót, miközben az osztandót változatlanul hagyjuk, akkor a hányados ugyanannyiadrészére (ugyanannyiszorosára) ellentétes irányban változik. Például:

$$\begin{array}{rcl} 100 : 5 & = & 20 \\ \downarrow \cdot 5 & & \downarrow \cdot 5 \\ 100 : 25 & = & 4 \end{array}$$

Ha az osztót 5-szörösére növeljük, miközben az osztandót változatlanul hagyjuk, a hányados 5-öd részére csökken.

- Ha az osztandó és az osztó is ugyanannyiszorosára (ugyanannyiadrészére) azonos irányban változik, akkor a hányados változatlan marad.

Például:

$$\begin{array}{rcl} 100 : 20 & = & 5 \\ \downarrow \cdot 2 & & \downarrow \cdot 2 \\ 200 : 40 & = & 5 \end{array}$$

Ha az osztandót és az osztót 2-szeresére növeljük, a hányados nem változik.

1.4.3. Műveletek sorrendje

Ha egy számítási feladatban egynél több művelet szerepel, akkor felmerül az a kérdés, hogy a műveletek milyen sorrendben végezhetők el.

Ha a feladatban egyfajta műveletből több szerepel, és ha ezek a műveletek

- összeadások vagy szorzások, akkor tetszőleges sorrendben
- kivonások vagy osztások, akkor balról jobbra haladva

végezhetők el.

Például a $25 + 7 + 18 + 3 = ?$ kiszámításánál haladhatunk balról jobbra, de az összeadás felcserélhetőségét kihasználva változtathatunk is a sorrenden: $25 + 7 + 3 + 18 = 25 + 10 + 18$.

A $48 : 3 : 8 = ?$ kiszámítása balról jobbra haladva: $48 : 3 : 8 = 16 : 8 = 2$. Ha felhasználjuk az osztás tulajdonságai közül azt, hogy az osztók sorrendje felcserélhető, akkor a műveletek a következő sorrendben is elvégezhetők: $48 : 8 : 3 = 6 : 3 = 2$.

Ha a feladatban a négy alpművelet közül többféle is szerepel, akkor balról jobbra haladva először a szorzásokat és az osztásokat végezzük el, majd ezt követően ugyancsak balról jobbra haladva az összeadásokat és kivonásokat. Például:

$$\underbrace{18 - 6}_{12} + 2 = 12 + 2 = 14$$

$$2 + \underbrace{3 \cdot 6}_{18} = 2 + 18 = 20$$

$$\begin{aligned} 18 - \underbrace{6 : 2}_{3} + \underbrace{3 \cdot 4}_{12} - 5 - 2 &= \underbrace{18 - 3}_{15} + 12 - 5 - 2 = \underbrace{15 + 12}_{27} - 5 - 2 = \underbrace{27 - 5}_{22} - 2 = \\ &= 22 - 2 = 20 \end{aligned}$$

A zárójel használata

Először mindig a zárójelben lévő műveletet végezzük el, ezután a műveleti sorrendnek megfelelően számolunk. Például:

$$3 \cdot \underbrace{(2 + 5)}_7 - 1 = \underbrace{3 \cdot 7}_{21} - 1 = 21 - 1 = 20.$$

A műveletvégzés sorrendjének kérdése a 2. évfolyamon kerül előtérbe, a zárójelek bevezetésére is ekkor kerül sor. Először szöveges feladatokhoz kötődően, a szöveget kétféleképpen értelmezve mutatjuk meg a zárójel használatát.

A következő példában matematikai értelemben nincs szükség a zárójelre (nem változtatja meg a műveleti sorrendet), de a szöveg értelmezése szempontjából a zárójellel hangsúlyozzuk, hogy melyik az először elvégzendő művelet.

1. példa

Gabinak 43 darab szalvétája volt. Barátnőjétől kapott még 21-et, de ebből 9-et a húgának adott. Hány szalvétája van most Gabinak?

Megoldás

A szöveget a történet szempontjából értelmezve a következő művelet sor írható fel: $43 + (21 - 9)$, hiszen a kapott 21 szalvétából adott oda 9-et. Természetesen ugyanerre az eredményre jutunk, ha előbb azt számoljuk ki, hogy hány szalvétája lett Gabinak, mielőtt adott volna belőle a húgának: $43 + 21 - 9$. Ebben az esetben nincs szükség – még az értelmezés miatt sem – zárójelre, hiszen balról jobbra haladva kell elvégezni a műveleteket.

Nem csak szövegértelmezési szempontból van szerepe a zárójelnek az alábbi példában.

2. példa

Az osztály 36 tanulója közül 12 kézilabda-, 13 pedig labdarúgóedzésre jár. Mivel a két edzés egy időpontban van, senki sem járhat mindkettőre. Hányan nem járnak egyik edzésre sem?

Megoldás

Kétféleképpen gondolkodhatunk:

a) A 36 főből előbb levonjuk a kézilabdázók, majd a focisták számát:

$$36 - 12 - 13 = 24 - 13 = 11.$$

b) Előbb összeadjuk a kézilabdázók és a focisták számát, majd az összeget vonjuk ki az osztálylétszámból: $36 - (12 + 13) = 36 - 25 = 11$. Ebben az esetben a zárójel elhagyásával a művelet sor eredménye is megváltozna:

$$36 - 12 + 13 = 24 + 13 = 37.$$

A 3–4. évfolyamon térünk rá az összetettebb (több és többféle műveletet tartalmazó) művelet sorok értelmezésére és kiszámítására.

1.4.4. Műveletek kapcsolata

Már az egyes műveletek értelmezéséből is kitűnik, hogy az összeadás és kivonás, valamint a szorzás és osztás egymással szoros kapcsolatban van, ezért ellentétes műveleteknek vagy egymás inverz műveleteinek is nevezzük őket.

Az összeadás és a kivonás kapcsolata

Ha egy számhoz egy másik számot hozzáadunk, majd ugyanezt kivonjuk, magát a számot kapjuk.

1. példa

Beának 5 babája van. Cecil adott neki 2 babát. Később azonban Cecil visszakérte a 2 babát. Hány babája van most Beának?

Megoldás

$5 + 2 - 2 = 5$, így Beának ismét 5 babája van.

Ha egy számból egy másik számot kivonunk, majd ugyanezt hozzáadjuk, magát a számot kapjuk.

2. példa

Beának 5 babája van. Cecilnek adott 2 babát. Később azonban visszakérte a 2 babát. Hány babája van most Beának?

Megoldás

$5 - 2 + 2 = 5$, így Beának ismét 5 babája van.

Megjegyzések:

- Az utóbbi összefüggést használjuk fel az írásbeli kivonás helyességének ellenőrzésére (lásd 1.3.7. fejezet).
- Hiányos összeadás vagy hiányos kivonás hiányzó tagját ugyancsak a két művelet kapcsolatára építve számítjuk ki. A nyitott mondatok megoldása során gyakran van erre szükségünk (lásd 2.2.2. fejezet).

A szorzás és az osztás kapcsolata

Ha egy számot szorzunk, majd osztunk ugyanazzal a 0-tól különböző számmal, akkor magát a számot kapjuk. Például: $9 \cdot 5 : 5 = 9$.

Ha egy számot osztunk, majd szorzunk ugyanazzal a számmal, akkor magát a számot kapjuk. Például: $28 : 4 \cdot 4 = 28$.

Megjegyzések:

- Az utóbbi összefüggést használjuk fel, az írásbeli osztás helyességének ellenőrzésére (lásd 1.3.9. fejezet).
- Hiányos szorzás vagy hiányos osztás hiányzó tényezőjét ugyancsak a két művelet kapcsolatára építve számítjuk ki. A nyitott mondatok megoldása során gyakran van erre szükségünk (lásd 2.2.2. fejezet).

Szétagolhatóság (Disztributivitás)

Eddig csak az azonos rangú műveletek (összeadás és kivonás, illetve szorzás és osztás) kapcsolatát vizsgáltuk meg, most pedig rátérünk a különböző rangú műveletek kapcsolatára is. Ezt a műveleti tulajdonságot disztributivitásnak, azaz szétagolhatóságnak nevezzük.

A szorzás szétagolható az összeadásra és a kivonásra nézve

Ha a szorzat egyik tényezője önmagában egy összeg vagy különbség, akkor ezt a szorzást úgy is elvégezhetjük, hogy előbb minden tagot megszorunk a tényezővel, majd a kapott szorzatok között elvégezzük az összeadást vagy

kivonást. Röviden azt mondjuk, hogy összeget vagy különbséget tagonként lehet szorozni, azaz a szorzás szétagolható. Például:

$$(10 + 8) \cdot 5 = 10 \cdot 5 + 8 \cdot 5, \text{ vagy } (10 - 8) \cdot 5 = 10 \cdot 5 - 8 \cdot 5.$$

A szorzás tényezőinek felcserélhetősége miatt a szétagolhatóság akkor is fennáll, ha nem az első, hanem a második tényező az összeg vagy különbség. Például:

$$5 \cdot (10 + 8) = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 8, \text{ vagy } 5 \cdot (10 - 8) = 5 \cdot 10 - 5 \cdot 8.$$

3. példa

Edit virágcsokrokat készít. Eddig 7 csokrot készített, mindegyikbe 2 szál liliomot és 3 szál gerberát tett. Hány szál virágot használt fel Edit?

Megoldás

Kétféleképpen gondolkodhatunk:

a) Ha egy csokorba $2 + 3 = 5$ szál virág kerül, akkor 7 csokorba $7 \cdot (2 + 3) = 7 \cdot 5 = 35$ szál virág.

b) Ha egy csokorhoz 2 szál liliomot használunk fel, akkor 7 csokorhoz $7 \cdot 2 = 14$ szál. Hasonlóan, ha egy csokorba 3 szál gerbera kerül, akkor 7 csokorba $7 \cdot 3 = 21$ szál. A liliomok és a gerberák száma így összesen $7 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 14 + 21 = 35$.

A kétféle okoskodás ugyanarra az eredményre vezet, azaz $7 \cdot (2 + 3) = 7 \cdot 2 + 7 \cdot 3$.

4. példa

Melyik több? Tedd ki a megfelelő relációjelet!

$$(110 + 45) \cdot 2 \quad 110 \cdot 4 + 45 \cdot 4$$

$$3 \cdot (230 - 33) \quad 3 \cdot 230 - 33$$

$$8 \cdot 47 + 8 \cdot 3 \quad 8 \cdot (47 + 3)$$

$$49 \cdot 9 \quad 50 \cdot 9 - 9$$

$$600 - 5 \cdot 60 \quad 8 \cdot 60 - 2 \cdot 60$$

Az osztás jobbról szétagolható az összeadásra és a kivonásra nézve

Az osztás nem felcserélhető művelet, ezért csak az osztandót cserélhetjük tagok összegére vagy különbségére, azaz az osztás csak jobbról szétagolható. Például: $(18 + 6) : 6 = 18 : 6 + 6 : 6$, de $24 : (4 + 2) \neq 24 : 4 + 24 : 2$.

Például: $(192 - 12) : 6 = 192 : 6 - 12 : 6$, de $180 : (6 - 3) \neq 180 : 6 - 180 : 3$.

Megjegyzések:

- Az osztás jobbról való széttagolhatóságának (disztributivitásának) ismerete igen fontos lesz a későbbi tanulmányok során, hiszen ezt a tulajdonságot használjuk fel az azonos nevezőjű törtek összeadásánál és kivonásánál.
- Gyakori hiba, hogy a széttagolást a fentiektől eltérő esetekben is alkalmazzák a tanulók. A hibákra egy-egy ellenpéldával hívhatjuk fel a figyelmet.
- Az összeadás nem disztributív a szorzásra nézve. Például:
 $(6 \cdot 7) + 5 \neq (6 + 5) \cdot (7 + 5)$, mert $(6 \cdot 7) + 5 = 42 + 5 = 47$,
viszont $(6 + 5) \cdot (7 + 5) = 11 \cdot 12 = 132$.
- A szorzás és az osztás egymásra nézve nem disztributív. Például:
 $(20 : 5) \cdot 4 \neq (20 \cdot 4) : (5 \cdot 4)$, mert $(20 : 5) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$, viszont
 $(20 \cdot 4) : (5 \cdot 4) = 80 : 20 = 4$.
 $(10 \cdot 8) : 2 \neq (10 : 2) \cdot (8 : 2)$, mert $(10 \cdot 8) : 2 = 80 : 2 = 40$, viszont
 $(10 : 2) \cdot (8 : 2) = 5 \cdot 4 = 20$.

1.5. A természetes számok egyszerűbb számelméleti tulajdonságai

1.5.1. Paritás

A paritás az első számelméleti fogalom, amelyet az alsó tagozaton bevezetünk.

Egy természetes szám páros, ha osztható 2-vel, páratlan, ha nem osztható 2-vel. Ez alsó tagozaton annak eldöntését jelenti, hogy a számot 2-vel osztva 0 maradékot kapunk-e vagy sem.

Mivel az osztást mint műveletet kétféleképpen értelmezzük (egyenlő részekre osztásként és bennfoglalásként), a páros szám fogalmát is kétféleképpen közelíthetjük meg.

- Ha az egyenlő részekre osztásból indulunk ki, akkor azt mondhatjuk, hogy például a 8 azért páros szám, mert a 8 elemű halmazokat fel tudjuk bontani két egyenlő számosságú részhalmazra.
- Ha a bennfoglalásból indulunk ki, akkor pedig azért, mert a 8 elemű halmazokat fel tudjuk bontani 2 elemű részhalmazokra (párookra).

A paritás vizsgálatát a tízes számkör megismerésével egy időben elkezdhetjük, annak ellenére, hogy a matematikai háttérrel, a maradékos osztást az 1. évfolyamon még nem tanítjuk. Példák a fenti két megközelítésre:

- Tudunk-e egy 18 fős osztályból két azonos létszámú csoportot kialakítani?
- Sorba tudjuk-e állítani a 18 fős osztály tanulóit kettesével úgy, hogy mindenkinek legyen párja?

A színesrúd-készlet elemeit is megvizsgálhatjuk aszerint, hogy páros vagy páratlan számot jelentenek:

- Ha egy rúd kirakható két azonos színű rúddal, vagy
- ha kirakható csupa rózsaszín rúddal (egységnek tekintve a fehér kiskockát),

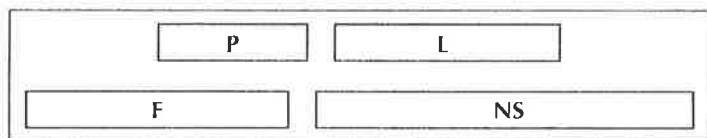
akkor páros számot jelöl.

Ha a tanulók már ismerik az összeadás műveletét, akkor erre támaszkodva a szám paritását aszerint is eldönthetjük, hogy a szám felírható-e

- két azonos szám összegeként,
- olyan összegként, ahol az összeadandók mindegyike 2.

1. példa

Próbáld kirakni két azonos színű rúddal! Ha sikerült, írd a rúd alá a kirakásnak megfelelő összeadást (a fehér kiskocka 1-et ér)! (1.39. ábra)

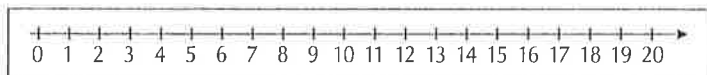


1.39. ábra

Ha a számokat elhelyezzük a számegyenesen, akkor azt látjuk, hogy a páratlan számok egyes számszomszédjai párosak, a páros számok egyes számszomszédjai pedig páratlanok.

2. példa

Karikázd be a páros számokat pirossal, a páratlanokat kékkel! Figyeld meg, hogyan követik egymást a számok! Milyenek a páratlan számok számszomszédjai? (1.40. ábra)



1.40. ábra

A természetes számok sorát vizsgálva megfigyeljük, hogy a páros számok megkereséséhez elegendő a számok utolsó számjegyét vizsgálni, mert a páros számok mindig 0-ra, 2-re, 4-re, 6-ra vagy 8-ra végződnek.

A páros szám fogalmának kialakításánál ki kell térnünk arra, hogy a 0 páros szám. Ez elsősorban azzal magyarázható, hogy osztható 2-vel, hiszen $2 \cdot 0 = 0$, de alátámasztható a $0 = 0 + 0$ összeadással, valamint azzal is, hogy az 1-nek, amely páratlan szám, a 0 számszomszédja.

1.5.2. Osztók, többszörösök, maradékok

A maradékos osztás megismerése után lehetőségünk nyílik az osztó, többszörös, közös osztó, közös többszörös, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös fogalmak előkészítésére. Erre a 3–4. évfolyamon kerülhet sor.

Egy természetes szám osztóján olyan 0-tól különböző természetes számot értünk, amellyel elosztva a számot, a maradék 0 lesz, vagy rövidebben: egy természetes szám osztói olyan számok, amelyek a számban „maradék nélkül megvannak”.

Megjegyzés:

Fogalmi félreértésre adhat okot, hogy az *osztó* szót a matematikában nem csak a fenti értelemben használjuk. Az osztás műveletben szereplő számok elnevezése osztandó, osztó, hányados és maradék. Az itt szereplő *osztó* kifejezést bővebb értelemben használjuk, hiszen nem csak a 0 maradékot adó osztásban beszélünk *osztóról*. A tanítás során tehát különbséget kell tennünk az osztás mint művelet és az oszthatóság mint két szám között értelmezett reláció között. Utóbbi esetben mindig megnevezzük a két számot is, tehát nem azt mondjuk, hogy az 5 egy osztó, hanem azt is hozzátesszük, hogy minek az osztója. Például az 5 osztója a 10-nek, vagy a 10 osztható 5-tel.

Egy 0-tól különböző természetes szám többszöröse olyan természetes szám, amelyet az adott számmal elosztva 0 maradékot kapunk. Például a 6-nak többszöröse a 18, mert $18 : 6 = 3$, és a maradék 0.

Az osztó és a többszörös fogalmakat, valamint a köztük lévő kapcsolatot példákkal mutatjuk be. Például a 18-nak osztója a 6, ugyanakkor a 6-nak többszöröse a 18.

Megjegyzések:

- Egy 0-tól különböző természetes számnak véges sok osztója van, például a 18 osztói: 1, 2, 3, 6, 9, 18.
- Egy 0-tól különböző természetes számnak végtelen sok többszöröse van, például a 3 többszörösei: 0; 3; 6; 9; 12; 15; ...

Egy 0-tól különböző természetes szám prímosztóinak meghatározását (prímtényezős felbontását) alsó tagozaton a következőképpen végezhetjük:

Az adott számot fagrafos elrendezésben két 1-től különböző szám szorzatára bontjuk, majd a kapott szorzótényezőket ugyancsak két-két 1-től különböző szám szorzatára. Az eljárást mindaddig folytatjuk, míg találunk 1-től különböző szorzótényezőt.

1. példa

Tanulmányozd a rajzot, majd készítsd el a 60-nak más felbontását is! (*1.41. ábra*)

A 60-hoz többféle ágrajz készíthető, attól függően, hogy egy-egy lépésben melyik kéttényezős szorzatot választjuk (amennyiben több is van). A gráf levélelemei a szám prímosztói lesznek. A különböző felbontások ugyanazokhoz a levélelemekhez vezetnek, csak a sorrendjükben lehet eltérés.

Ezzel az eljárással a számelmélet alaptételének állítását támasztjuk alá: egy összetett szám a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen felbontható prímtényezők szorzatára.

Természetesen a prímszám fogalma nem alsó tagozatos tananyag, de különböző feladatsituációkban felfedeztethetjük a tanulókkal azt, hogy vannak olyan számok, amelyeknek csak 2 osztója van: 1 és önmaga.

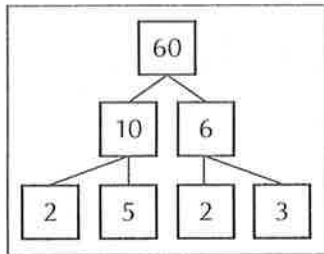
Egy szám osztóit tehát próbálgatással, illetve kéttényezős szorzatokra bontással kereshetjük meg, de a színesrúd-készlet is alkalmas az osztók megállapítására.

2. példa

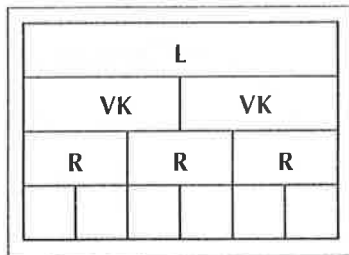
Szönyegezd a lila, majd a citromsárga rudat azonos rudakkal, többféleképpen! Jegyezd le szorzással a kirakásokat! (A fehér kiskocka 1-et ér.)

Megjegyzés:

Az egyes sorok színe az adott rúdnak megfelelő szám osztóit mutatja, a sorok száma pedig az osztók számát. (1.42. ábra) Felfigyelhetünk itt is arra, hogy vannak olyan rudak, amelyek a fenti módon csak a fehér kiskockával és saját magukkal rakhatók ki (prímszámok).



1.41. ábra



1.42. ábra

Két vagy több szám közös osztóin azokat a számokat értjük, amelyek mindkét számnak osztói (mindkét számban „megvannak maradék nélkül”). A közös osztók közül kiválasztva a legnagyobbat, kapjuk a legnagyobb közös osztót. Például:

a 12 osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 12;

a 18 osztói: 1, 2, 3, 6, 9, 18;

közös osztók: 1, 2, 3, 6.

A 12 és a 18 legnagyobb közös osztója a 6.

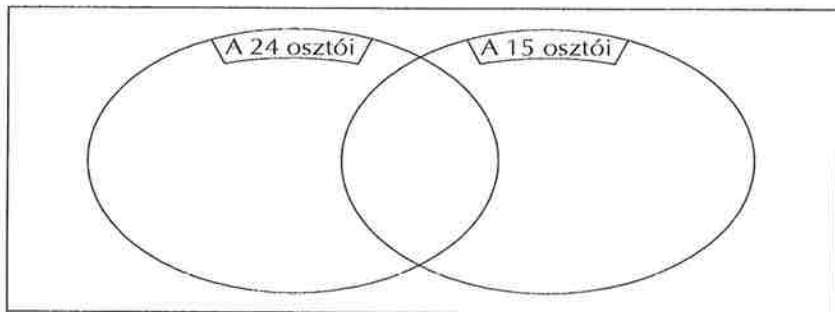
Megjegyzés:

Megállapíthatjuk, hogy a legnagyobb közös osztónak az összes többi közös osztó osztója.

3. példa

Helyezd el 0-tól 30-ig a számokat a halmazábrában! (1.43. ábra) Melyek azok a számok, amelyek

- a) a 24-nek és a 15-nek is osztói?
- b) a 24-nek osztói, de a 15-nek nem?



1.43. ábra

Két vagy több szám közös többszörösén olyan számot értünk, amelyik mindkét számnak többszöröse. A közös többszörösök közül a legkisebb 0-tól különbözőt nevezzük a két vagy több szám legkisebb közös többszörösének.

Megjegyzések:

- A 0 kizárása azért indokolt, mert egyébként bármely két szám legkisebb közös többszöröse a 0 lenne. Például:
 - a 12 többszörösei: 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, ...
 - a 18 többszörösei: 0, 18, 36, 54, 72, 90, ...
 - közös többszörösök: 0, 36, 72, ...
- A legkisebb közös többszörös: 36.
- A legkisebb közös többszörös osztója a többi közös többszörösnek.

A maradékos osztás megtanítása után kézenfekvő az osztási maradékok vizsgálata.

Ha egy természetes számot 0-tól különböző természetes számmal osztunk, akkor a lehetséges maradékok száma megegyezik az osztóval, a legnagyobb maradék pedig 1-gyel kisebb annál. Például a 3-mal való osztás lehetséges maradékai: 0, 1, 2. A természetes számok mindegyike besorolható a fenti 3 maradékosztály valamelyikébe.

Az egy maradékosztályba tartozó számokat növekvő sorrendbe állítva olyan számtani sorozatot kapunk, melynek különbsége az adott szám. Például a 3-mal osztva 1 maradékot adó számok sorozata: 1, 4, 7, 10, 13, ...

4. példa

Színezd ki a mezőket a számtáblázatban!

- Kékre színezd, ha a szám 3-mal osztva 0 maradékot ad!
- Pirosra színezd, ha a szám 3-mal osztva 1 maradékot ad!
- Sárgára színezd, ha a szám 3-mal osztva 2 maradékot ad!

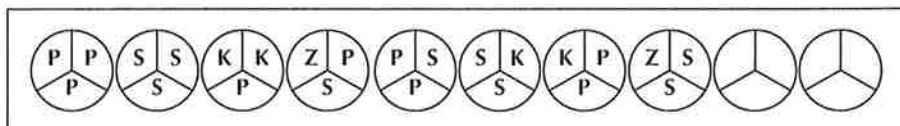
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Megjegyzés:

A számtáblázatok használata vizuálisan is segít a számelméleti tulajdonságok felismerésében.

5. példa

Színezd ki a köröket, ha felismertél valamilyen szabályt! Milyen színű lesz a 20. kör? Hányadik lesz a sorban az első teljesen piros kör? (1.44. ábra)



1.44. ábra

Megjegyzés:

A feladattípus a jelsorozatok (lásd 5.3.1. fejezet) képzésén túl a számelméleti fogalmak alapozását is segíti. A képzési szabály szerint az alsó harmadban minden második, a jobb oldaliban minden harmadik, a bal oldaliban minden negyedik tag színe lesz azonos. Ennek megfelelően a tagok a 2, a 3 és a 4 legkisebb közös többszörösének, azaz a 12-nek megfelelő periódussal ismétlődnek. A tagok sorszámból úgy tudjuk meghatározni az egyes részek színét, hogy megvizsgáljuk az osztási maradékokat. Például a 20. tagban az alsó harmad ugyanolyan színű, mint a 2. tagban, azaz sárga, mert a 20 2-vel osztva ugyanúgy 0 maradékot ad, mint a 2. Hasonlóan a jobb oldali harmad

színe megegyezik a 2. tag színével, azaz sárga, mert a 20 3-mal osztva 2 maradékot ad. Végül a bal oldali harmad színe azért lesz zöld, mert a 20 osztható 4-gyel, csakúgy, mint a 4.

1.5.3. Elemi oszthatósági szabályok

Oszthatósági szabályokon olyan „módszereket” értünk, amelyek segítségével egy adott számról anélkül dönthetjük el, hogy osztható-e egy másik számmal, hogy ténylegesen elvégeznénk az osztást. Természetesen fontos szempont az is, hogy a „módszer” ne legyen bonyolultabb, mint maga az osztás.

Az ismert oszthatósági szabályok közül alsó tagozaton a 2-vel, 5-tel, 10-zel való oszthatósági szabályokat fedeztetjük fel, illetve megemlíthetjük a 3-mal és 9-cel való oszthatóság szabályát.

Egy természetes szám akkor osztható 2-vel, 5-tel vagy 10-zel, ha utolsó számjegye osztható 2-vel, 5-tel vagy 10-zel. Tehát a szám akkor osztható 2-vel, ha páros számra, 5-tel, ha 0-ra vagy 5-re, 10-zel, ha 0-ra végződik. A szabályok felfedezése a 2. évfolyamon a szorzótáblák tanításával és összevetésével párhuzamosan történik. A szabályok kiterjesztésére 100-nál nagyobb számokra a 3–4. évfolyamon kerül sor.

1. példa

A 20, 35, 46, 50, 120, 124, 133, 245, 300 számok közül válaszd ki a 10-zel, majd az 5-tel, végül a 2-vel oszthatókat!

Egy természetes szám akkor osztható 3-mal vagy 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal vagy 9-cel. Ezeket az összefüggéseket nehezebb észrevenni. 2. évfolyamon a 9-es szorzótábla tanításánál figyelhetnek fel a tanulók arra, hogy a 9-cel osztható számokban a számjegyek összege mindig 9 ($1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5 = 5 + 4 = 6 + 3 = 7 + 2 = 8 + 1 = 9 + 0 = 9$). A szabályok kiterjesztése a 3-as és a 9-es szorzótáblában nem szereplő számokra túlmutat az alsó tagozatos tananyagon. Tekintettel arra, hogy magának a szabálynak az alkalmazása nem nehéz, mégis célszerű irányítottan felfedeztetni az összefüggést.

2. példa

Alkoss 3 jegyű számokat a 2, 3, 7 számkártyákból! A kapott számok mindegyikét oszd el 3-mal. Mit tapasztalsz?

3. példa

Töltsd ki a táblázatot! Mit figyelhetsz meg?

szám	230	546	603	471
a szám 3-mal való osztási maradéka				
számjegyeinek összeg				
a számjegyek összegének 3-mal való osztási maradéka				

Megjegyzés:

A számelméleti tulajdonságokat alsó tagozaton a teljesség igénye nélkül vizsgáljuk. Tudatában vagyunk annak, hogy az itt bevezetésre kerülő fogalmak a spirális tananyag-felépítésnek megfelelően a következő években újra előkerülnek, folyamatosan bővülnek és mélyülnek.

1.6. A természetes szám fogalmának bővítése: az egész szám fogalmának alakítása

A számkörbővítés elnevezést az alsó tagozatos matematikatanításban kettős értelemben használjuk. Értjük alatta egyrészt a természetes számok évfolyamonként növekvő terjedelmét (*lineáris számkörbővítés*), másrészt a negatív egészekkel és a törtekkel való bővítést (*strukturális számkörbővítés*). Ez utóbbi értelemben a természetes számkör bővítéséhez érdemben a 3. évfolyamon célszerű hozzákezdenünk, amikor a tanulók természetesszám-fogalma a 100-as számkörben szilárdnak mondható, és megfelelő jártassággal rendelkeznek az alapműveletek végzésében. Ez természetesen nem zárja ki, hogy a gyerekek már korábban is tudják, hogy például a mínusz 15 °C nagyon hideget jelent, hogy egy negyed pizza az mekkora, és így tovább. Az 1–2. évfolyamon esetlegesen felmerülő problémákhoz képest a negatív számok és a törtszámok fogalmi előkészítésére a 3. és 4. évfolyamon lényegesen több időt kell fordítanunk.

Tekintettel arra, hogy negatív törtszámokat alsó tagozaton nem tanítunk, ezért az elmélettől eltérően nem az egész számkört bővítjük tovább, hanem a természetes számokból kiindulva egyfelől a negatív egészeket, másfelől a

pozitív törtszámokat vezetjük be. A természetes számok két irányban történő bővítése – tanítási szempontból – tehát két, egymástól független folyamat: (1. 45. ábra)



1.45. ábra

Alsó tagozaton a negatív egészek és a törtek bevezetésekor egy szemléletes, tapasztalati utat követünk. Az új, korábban még nem ismert számokat tartalommal ruházzuk fel, a valóságban is létező állapotokhoz, helyzetekhez, változásokhoz rendeljük őket hozzá, és a velük való műveletvégzést tevékenységgel is követjük. A szemléletes út alsó tagozatos bejárásával készíthetjük elő a számkörbővítési problémák – lényegesen magasabb absztrakciós szintet igénylő – felső tagozatos tárgyalását.

Mindkét számkörbővítés tanításakor alapvetően az alábbi időrendet célszerű követni:

- fogalomalkotás induktív módon,
- jelölés megismerése,
- tanulói tevékenységek a fogalom használatára (negatív egészszel, illetve törtszámmal megadható állapotok, mennyiségek, változások, helyzetek előállítása),
- az új számokkal bővített számhalmaz elemeinek nagyság szerinti összehasonlítása, rendezése,
- tevékenységgel kísért művelet-előkészítés a bővített számhalmazban az összeadásra és a kivonásra vonatkozóan.

Tantárgypedagógusok körében nem eldöntött kérdés, hogy a tanulók többségének melyik számkörbővítés jelent komolyabb problémát. Mivel ismeretsajátítási szempontból egyik sem épül a másikra, ezért a tanítás során – a 3. és a 4. évfolyamon használt tankönyvek ajánlását is figyelembe véve – szabadon választhatjuk meg a bővítések időbeli sorrendjét. Szaktudományi

szempontból az egész számkör értelmezése történik korábban ($N \rightarrow Z$, majd $Z \rightarrow Q$), ezért könyvünkben is ezt az időrendet követjük.

1.6.1. A negatív számok bevezetése

A természetes számokat többféle értelemben, különböző jelentéstartalommal használjuk (lásd 1.1.2. és 1.1.4. fejezetek).

A negatív számok funkciója más: olyan állapotokhoz, helyzetekhez rendelhetjük őket hozzá, amelyek kétirányú változások vagy mozgások eredményeképpen jöhetnek létre, és természetes számmal csak körülményesen adhatók meg. Ha például a számegyenesen az 1-ről indulva 4-et lépünk egyesével balra, akkor a 0-tól balra 3 egység távolságra jutunk. Ezt rövidebben úgy fejezhetjük ki, hogy a -3 -ra érkezünk. Ha $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ról $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ot csökkent a hőmérséklet, akkor egyszerűbb azt mondani, hogy most $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ van ($3\text{ }^{\circ}\text{C}$ hideg helyett).

A negatív számok használata a gyakorlati életben, a köznyelvi szóhasználatban is elterjedt. A fagypont alatti hőmérsékleti értékek megadásán kívül alkalmas például vállalkozások veszteséges mérlegének, de az eladósodás mértékének jellemzésére is. A labdajátékokban a *negatív gólkülönbség* kifejezést használják, ha több a kapott gólok száma.

A 3. évfolyamon a negatív számok bevezetésére három alapvető megközelítést javasunk. Ezeket a javaslatokat a tanítás során ne csak alternatív módon vegyük figyelembe, hanem lehetőség szerint mind a hármat kellő részletességgel dolgozzuk is fel!

Hőmérsékletmérés

A levegő, a víz, a talaj, az emberi test hőmérsékletének mérésére különböző hőmérőket használunk. A hőmérséklet egyik, Európában használatos mértékegysége a Celsius-fok (jele: $^{\circ}\text{C}$). A Celsius-skála két alappontja a 0 és a 100. $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on a víz megfagy, $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on pedig forr.

A fagypont alatti hőmérsékletek mérőszámának jelölésére negatív előjellel ellátott számokat vezetünk be. (A köznyelv használja még az 1, 2, 3, ... fok hideg kifejezést is.)

Amerikában a hőmérsékletet Fahrenheitben mérik. A két hőmérsékleti skála átváltási szabálya: $f = 9 \cdot c : 5 + 32$, ahol f és c az egymással ekvivalens (Fahrenheitben, illetve Celsiusban kifejezett) hőmérsékleti értékek.

Megjegyzések:

- A hőmérsékletmérést a negatív hőmérsékleti értékek természetes előfordulása miatt a téli hónapokban célszerű tanítani.
- A negatív számok előjelét alsó tagozaton még ajánlatos megkülönböztetni a kivonás jelétől. A -1 , -2 , -3 , ... mérőszámok nem elvételre, hanem a fagypont alatti hőmérsékletekre utalnak, ezért ez a jelölésmód szerencsésebbnek tűnik a -1 , -2 , -3 , ... jelölésnél.

A hőmérsékletmérés tanításakor mutassunk a gyerekeknek különböző hőmérőket (lázmérőt, szobahőmérőt, folyadék- és talajhőmérőt)! Beszélgessünk arról, hogy melyiket hol és hogyan használják! Olvastassuk le a tanterem és a külső levegő hőmérsékletét, mérjük meg egy tanuló testhőmérsékletét, a víz körülbelüli forrás- és fagyáspontját (forrásban lévő víz, illetve pohárba tett jégkockák segítségével)!

A mértékegységről, a Celsius hőmérsékleti skála konstrukciójáról alsó tagozaton nem tudunk érthető magyarázatot adni. Mindenesetre szoktassuk hozzá a gyerekeket ahhoz, hogy a hőmérséklet megadásakor a mérőszámhoz – mint minden mérésnél – tegyék hozzá a Celsius-fokot. Például a külső levegő hőmérsékletének kifejezése szóban: mínusz két Celsius-fok, írásban: $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Fedeztessük fel a hőmérőnek azt a tulajdonságát, hogy a hőmérséklet emelkedésekor (csökkenésekor) a higanyszint is följebb (lejjebb) kerül. Beszéljük meg, hogy mi történik, ha például $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ról 1 fokonként csökken a hőmérséklet. Házi feladatként végeztessünk méréseket otthon, figyeltessük meg a meteorológiai előrejelzést a következő néhány napban!

1. példa

Végezz méréseket otthon! Írd a vonalakra a hiányzó hőmérsékleti értékeket! Hány $^{\circ}\text{C}$ várható ma éjszakára és holnap napközben? Hallgasd meg a tévében az időjárás-jelentést!

Hány $^{\circ}\text{C}$ van a szobádban? ____

Mennyi a külső levegő hőmérséklete? ____

Hány $^{\circ}\text{C}$ van a hűtőszekrény belsejében? ____

Hány $^{\circ}\text{C}$ van a mélyhűtőben? ____

Mennyi a testhőmérsékleted? ____ Nem vagy lázas? ____

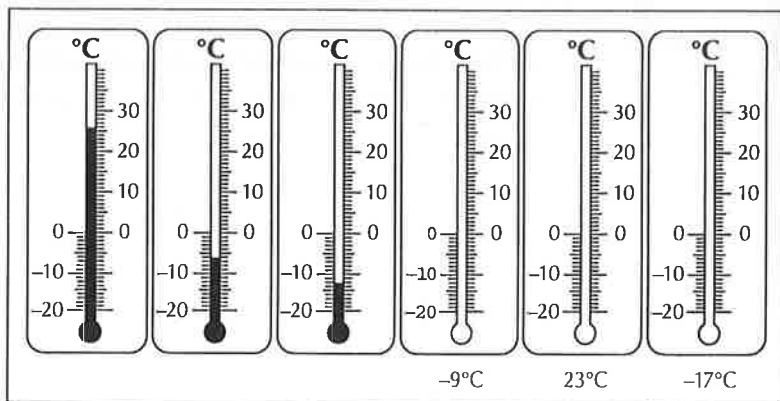
Ma éjszaka ____ várható.

Holnap napközben körülbelül ____ lesz a hőmérséklet.

Valódi vagy játék hőmérőről olvassuk le a hőmérsékleteket, és fordítva: jelöltessük be a „higanyszintet” a megadott hőmérsékletek alapján!

2. példa

Hány °C-ot mutatnak a hőmérők? Írd a hőmérők alá! Jelöld a megadott hőmérsékleteket a higanyszál berajzolásával! (1.46. ábra)



1.46. ábra

Olyan feladatot is adhatunk a tanulóknak, amelyben több hőmérsékleti értéket kell megadni.

3. példa

Hány °C lehet a hőmérséklet (h), ha

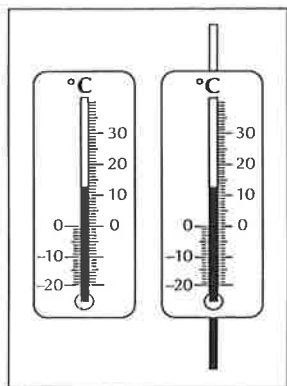
a) Melegebb van 2 °C-nál, de hidegebb van 7 °C-nál. ____ < h < ____

b) Hidegebb van 3 °C-nál, de melegebb van -3 °C -nál. ____ < h < ____

c) Melegebb van -6 °C-nál, de nincs melegebb 0 °C-nál. ____ < h ≤ ____

Megjegyzés:

Mielőtt ismertetnénk a feladatot, beszéljük meg, mit jelentenek a „melegebb, mint ...”, „nincs melegebb, mint ...”, hidegebb, mint ...”, „nincs hidegebb, mint ...” kifejezések. Ezek értéséről bizonyosodhatunk meg, ha a feladathoz hasonló megfogalmazásban kérjük a tanulóktól, hogy becsüljék meg a hőmérsékletet az osztályteremben, illetve odakint.



1.47. ábra

A hőmérséklet változásával kapcsolatos feladatok feldolgozásához (tanulónak és tanítónak) egyaránt segítséget jelent egy kartonból készített hőmérő-modell. Kétféleképpen is készíthetünk ilyet. (1.47. ábra)

A bal oldali képen a higanyszálat az egyik felén megfestett szélesebb gumiszál helyettesíti, amelynek két végét a vastagított helyeken átfűzzük, majd a hőmérő hátsó oldalán szorosan összekötjük. A jobb oldali kép egy „tologatható” modellt mutat, amelynél a higanyszál egy kartoncsík. Ezekkel a modellekkel nemcsak az aktuális hőmérsékletet

állíthatjuk be, hanem a gumikarika, illetve a papírcsík mozgatásával a hőmérséklet-változást is szemléltetni tudjuk.

Egy példa, amelynek tanulói megoldásánál a hőmérőmodell jó szolgálatot tehet:

4. példa

Mennyi volt, hogyan változott, és mennyi lett a hőmérséklet? Töltsd ki a táblázatok hiányzó részét! (↑ : emelkedett a hőmérséklet, ↓: csökkent a hőmérséklet)

a)				b)				
Ennyi volt	Így változott		Ennyi lett		Ennyi volt	Így változott		Ennyi lett
0 °C	↓	4 °C			0 °C			-6 °C
-2 °C	↓	5 °C			-1 °C			-5 °C
9 °C	↑	6 °C				↓	2 °C	-3 °C
-3 °C	↑	11 °C				↑	4 °C	-2 °C

Megjegyzés:

Problémát az utóbbi feladatban csak a *b)* táblázat két utolsó sorának kitöltése jelenthet. Ismertessük fel, hogy az eredeti hőmérsékletekhez a jelenlegi állapotokból kiindulva ellentétes irányú változással juthatunk el.

Készpénz, adósság, anyagi helyzet

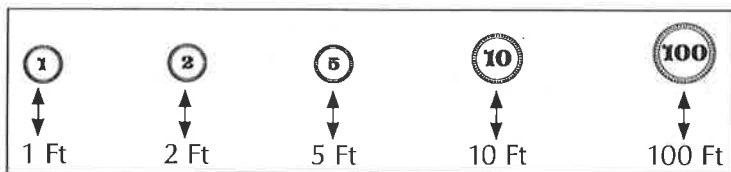
Ha készpénzzel (vagy bankbetéttel) rendelkezünk, de tartozásunk nincs, akkor anyagi helyzetünket pozitív számmal jellemezhetjük. Ha viszont nincs pénzünk, és ezért kölcsönt veszünk fel, akkor hiányunk (tartozásunk, adósságunk) keletkezik. Ebben az esetben anyagi helyzetünket negatív számmal fejezhetjük ki.

Általában is igaz, hogy az anyagi helyzetet a készpénz és az adósság együttesen határozza meg. Például 2000 Ft készpénz és 10 000 Ft adósság esetén anyagi helyzetünk „mérlege”: -8000 Ft. Ha több (kevesebb, ugyanannyi) a készpénzünk, mint az adósságunk, akkor anyagi helyzetünket pozitív (negatív, nulla) számmal tudjuk számszerűsíteni.

Megjegyzés:

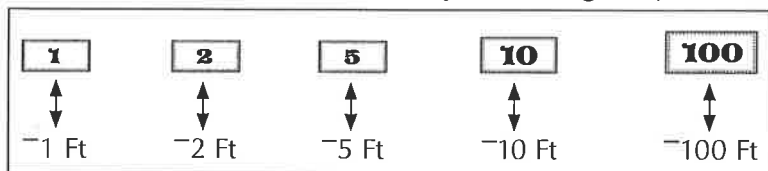
Az iskolai szóhasználatban az anyagi helyzet helyett a vagyoni helyzet kifejezés terjedt el. A vagyon azonban tágabb értelmű fogalom, egyéb dolgok (ingatlanok, értéktárgyak) is beletartoznak, ezért inkább az anyagi helyzet kifejezést tartjuk helyesebbnek.

A tanulók már a számkörbővítések előtt hozzászoktak a játék pénzek használatához. A körbe (körlapra) írt szám mindig készpénzt jelentett. (1.48/a ábra)



1.48/a ábra

A tartozást, az adósságot szintén tárgyiiasíthatjuk az ún. adósságcédulák bevezetésével. A cédulára (rajzos megjelenítésnél a téglalapba) írt szám azt mutatja meg, hogy mennyivel tartozunk, mennyi az adósságunk. (1.48/b ábra)



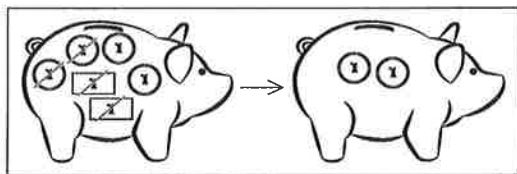
1.48/b ábra

Például 3000 Ft adósság az anyagi helyzetünkhöz -3000 Ft-tal járul hozzá. A negatív számok hozzárendelését kezdetben kapcsoljuk össze kölcsönről, hitelről, adósságról, tartozásról szóló feladatokkal:

5. példa

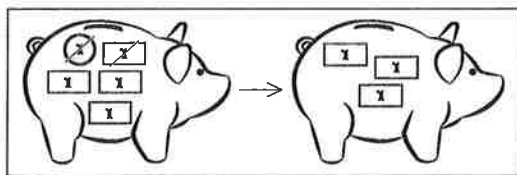
Ottónak egy 500 Ft-os könyvet kell megvásárolnia, de csak 300 Ft-ja van. Mit kell tennie? Milyen lesz az anyagi helyzete a vásárlás után? Számmal add meg!

Játék pénzek és adósságcédulák használatával magyarázzuk el, hogy anyagi helyzetünket milyen módon számszerűsíthetjük a legegyszerűbben. Ehhez azt az egyszerű tényt kell megérteniük a gyerekeknek, hogy valamennyi készpénz és ugyanannyi adósság együtt 0 Ft-ot ér, mert 1 Ft adósságot 1 Ft készpénzzel tudunk kifizetni. (1.49/a, b ábra)



1.49/a ábra

A bal oldali persely tartalma 2 Ft készpénzzel helyettesíthető, a persely szerinti anyagi helyzetünk: 2 Ft.



1.49/b ábra

Most a bal oldali persely tartalma 3 Ft adóssággal helyettesíthető, a persely szerinti anyagi helyzetünk: -3 Ft.

6. példa

Számolj, rajzolj! Andreának 110 Ft készpénze és 250 Ft tartozása volt. Hány Ft-ot gyűjtött, ha a tartozását megadta, és még egy 80 Ft-os hajgumit is tudott vásárolni?

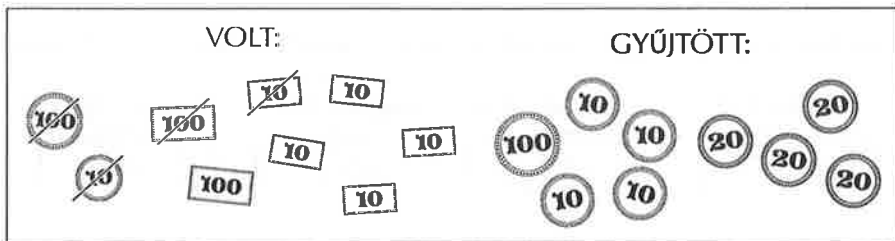
Megoldás

a) Számolással, 2 lépésben:

$$250 \text{ Ft} - 110 \text{ Ft} = 140 \text{ Ft (ennyi volt a tartozása)}$$

$$140 \text{ Ft} + 80 \text{ Ft} = 220 \text{ Ft (ennyit kellett gyűjtenie összesen)}$$

b) Szemléltetéssel (1.50. ábra):



1.50. ábra

Gyakoroltassuk az anyagi helyzetek megállapítását és előállítását számlák kifizetésével, vásárlással, kölcsönfelvétellel kapcsolatos feladatok megoldásával! Fedezzük fel a tanulókkal, hogy ugyanazt az anyagi helyzetet (egész számot) többféleképpen is megadhatják (felírhatják két természetes szám különbségeként)!

A manipuláció, a készpénz és az adósság tárgyasítása a megértés szempontjából fontos, ezért engedjük meg minden olyan esetben, amikor azt igénylik a tanulók.

7. példa

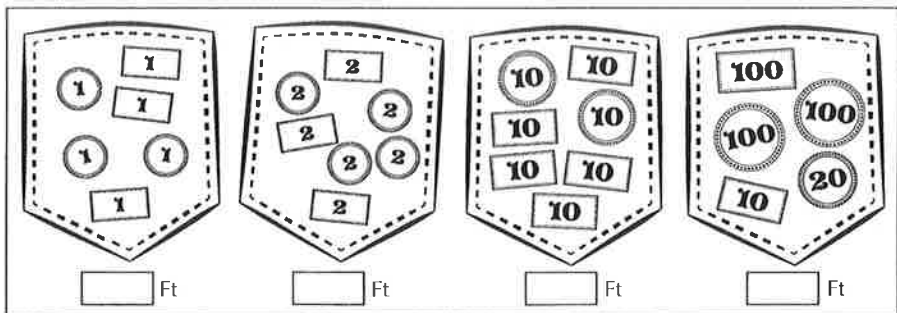
Anyagi helyzeteket soroltunk fel:

5 Ft 10 Ft ~20 Ft 20 Ft ~30 Ft 0 Ft ~50 Ft 100 Ft ~150 Ft

Karikázd be azokat, amelyek készpénzt jelentenek! Húzd alá azokat, amelyek adósságra utalnak!

8. példa

Mennyit ér a zsebben található készpénz és adósság összesen? Írd a zseb alá! (1.51. ábra)



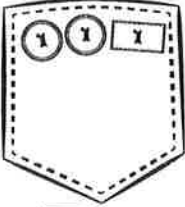
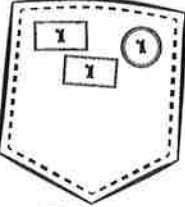
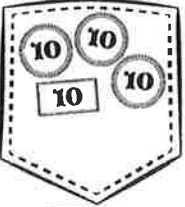
1.51. ábra

Megjegyzés:

Adjunk olyan feladatot is a tanulóknak, amelyben nem az anyagi helyzet megállapítása, hanem annak többféle előállítása a cél! Ez a fajta kétirányúság analóg a 2. feladatban megfogalmazott tevékenységekkel.

9. példa

Rajzolj hozzá annyit, hogy a megadott „vagyon” legyen a keretben! (1.52. ábra)

vagyon: 4 Ft	vagyon: -3 Ft	vagyon: 0 Ft	vagyon: -100 Ft
			
volt: Ft	volt: Ft	volt: Ft	volt: Ft
hozzátettem: Ft	hozzátettem: Ft	hozzátettem: Ft	hozzátettem: Ft

1.52. ábra

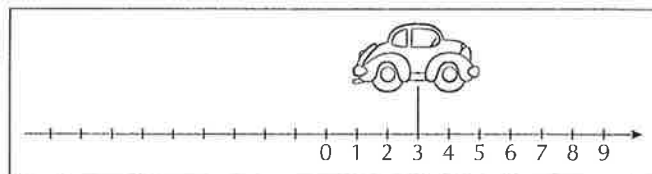
Mozgás a számegyenesen

A negatív egész számokat bevezethetjük a számegyenesen történő mozgással kapcsolatos feladatokkal is. Ha például egy kartonból kivágott kisautó egy pozitív szám fölött áll, és jobbra nézve több egységet tolat, mint amelyik szám fölött áll, akkor a 0-tól balra fog érkezni.

10. példa

Jelöld színessel a kisautó érkezésének helyét a számegyenesen!

6 egységet tolatott. (1.53. ábra)



1.53. ábra

Megjegyzés:

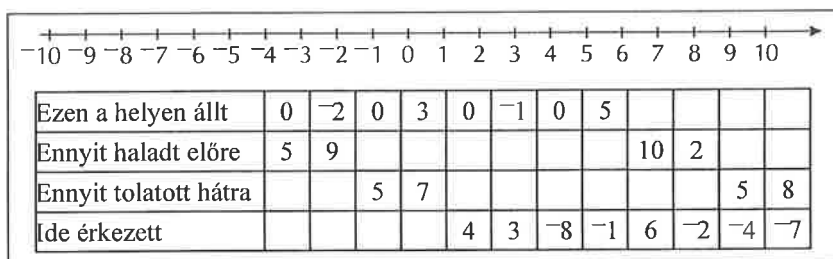
A negatív számok bevezetését ebben a modellben azzal indokolhatjuk, hogy a kisautó helyét számmal szeretnénk megadni akkor is, ha a 0-tól balra he-

lyezkedik el. A számegyenesen a rovátkák alá beírhatják a tanulók a hiányzó számokat a 0-tól balra egyesével haladva. Maguktól is rájöhetnek a számelhelyezésekre, ha emlékeztetjük őket egy elforgatott hőmérőre.

A negatív számok számegyenesen elfoglalt helyének ismeretében már összetettebb feladatot is kitűzhetünk a kisautó mozgásával kapcsolatosan:

11. példa

A kisautó mindig jobbra nézzen! Mozgasd a számegyenesen, a táblázatban leírtak szerint! Oszloponként haladj a hiányzó számok beírásával! (1.54. ábra)



1.54. ábra

Megjegyzés:

A táblázat 9–12. oszlopának hiányzó számaihoz úgy juthatnak el könnyen a tanulók, hogy az érkezés helyétől kiindulva a megadotthoz képest ellenkező irányban, de ugyanannyi egységgel mozgatják a kisautót.

A negatív egész számok bevezetésére a három ismertett modellen kívül természetesen más lehetőség is kínálkozik. Például a függőleges irányú mozgás (közlekedés lifttel, mozgás a létrán) állomásainak (szintek, lépcsőfokok) jelölésére szintén használhatunk negatív számokat.

Fontos hangsúlyoznunk, hogy a 0 se nem pozitív, se nem negatív szám. Az egész számok halmazábrában történő elhelyezésénél gyakran előforduló hiba, hogy a tanulók a 0-t a pozitív és a negatív számok halmazának közös részébe (a metszetbe) írják. A 0 helye a két halmazkarikán kívül van, a metszetbe viszont egyetlen szám sem kerülhet.

1.6.2. Egész számok rendezése

Az egész szám fogalmának kialakításához a negatív egészek értelmezésén túl az egész számok nagyság szerinti összehasonlítása, növekvő és csökkenő rendezése is hozzátartozik. Elkerülhetjük, illetve csökkenthetjük a hibás analógiák (például $7 > 5 \rightarrow \neg 7 > \neg 5$) alkalmazását, ha az ilyen feladatoknál kezdetben nem vonatkoztatunk el a számok jelentéstartalmától.

Először tehát ne számokat, hanem hőmérsékleti értékeket, anyagi helyzeteket és a kisautó érkezési helyeit hasonlítsák össze a tanulók.

A hőmérsékleti értékek növekvő rendezésekor az van előbb, amelyik hidegebbet jelent.

12. példa

Húzd alá a kettő közül a megfelelő hőmérsékletet!

a) Melyik jelent hidegebbet?

3 °C 13 °C
- 8 °C - 9 °C
2 °C - 12 °C
- 10 °C 0 °C

b) Melyik jelent melegebbet?

- 7 °C 5 °C
16 °C - 16 °C
0 °C 21 °C
- 15 °C - 4 °C

13. példa

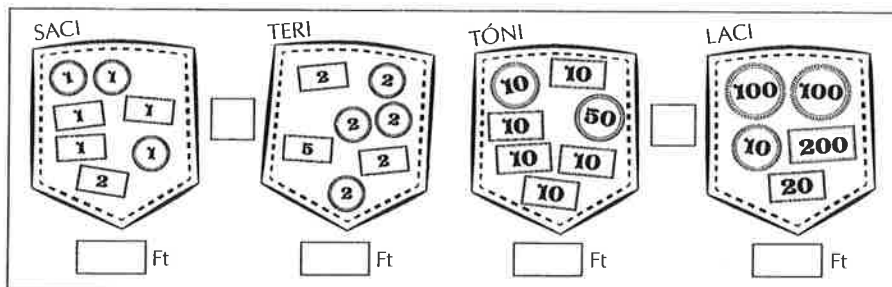
Állítsd növekvő sorrendbe a hőmérsékleteket! A leghideggebbről kezd!

23 °C, - 25 °C, - 11 °C, 3 °C, - 9 °C, 12 °C, - 19 °C, 35 °C, - 3 °C, 7 °C, 0 °C

Az egyetlen számmal kifejezett anyagi helyzetek összehasonlításakor a negatív értékek egymáshoz viszonyítása okozhatja a fő problémát. Az ilyen értékek növekvő rendezésekor az kerül előbbre, amelyik kedvezőtlenebb anyagi helyzetre, nagyobb adósságra utal.

14. példa

Fejezd ki egyetlen számmal, majd hasonlítsd össze a gyerekek anyagi helyzetét! ($<$, $=$, $>$) (1.55. ábra)



1.55. ábra

Rendezd sorba az anyagi helyzeteket! A legrosszabb anyagi helyzettel kezd a felsorolást!

1 Ft 10 Ft -8 Ft 5 Ft -1 Ft 0 Ft -40 Ft 70 Ft -10 Ft

Megjegyzés:

Az egész számok rendezése (a hőmérsékleti értékek és az anyagi helyzetek összehasonlítása után) várhatóan már nem okoz problémát a tanulónak. Ennek ellenére szükség esetén használhatják a számegyenest.

Sorozatokkal kapcsolatos feladatokkal szintén tovább mélyíthetjük az egész számok közötti eligazodásukat.

16. példa

Folytasd a számsorozatot, ha felismerted a szabályt!

a) 11, 9, 7, ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...

b) -13, -10, -7, ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...

 $c^*) \quad 0, \quad 2, -1, \quad 1, -2, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots$

Megoldás

A c^* feladatrészen egy váltakozó differenciájú $(+2, -3)$ számsorozat szerepel. Ennek megfelelően (számegyenes segítségével) a megoldás:

0, 2, -1, 1, -2, 0, -3, -1, -4, -2, -5, -3, -6, -4, -7

1.6.3. Az összeadás és a kivonás előkészítése az egész számkörben

4. évfolyamon az egész számok körében szerzett 3. évfolyamos tapasztalatok felelevenítése után (vagy azzal párhuzamosan) megkezdhetjük az összeadás és a kivonás előkészítését. Valóban csak előkészítésről lehet szó, nem pedig a felső tagozatos formális műveletvégzési algoritmusok előrehozataláról.

Tevékenységgel kövessük nyomon a hőmérséklet, illetve az anyagi helyzet változását! A művelettel történő lejegyzést nem várjuk el az alsó tagozatos tanulóktól, elegendő, ha szavakban meg tudják fogalmazni a változást. A következő példákban a műveletek felírását kérő utasításokat *-gal jelöltük, utalva arra, hogy ezek kiegészítő anyagként tekintendők.

A hőmérsékleti változásoknál a hőmérséklet emelkedését összeadással, csökkenését kivonással írhatjuk le. Ezeknél a műveleti lejegyzéseknél negatív érték hozzáadása vagy kivonása nem fordulhat elő, hiszen a növekedés és a csökkenés mértékét is pozitív egész számmal adjuk meg.

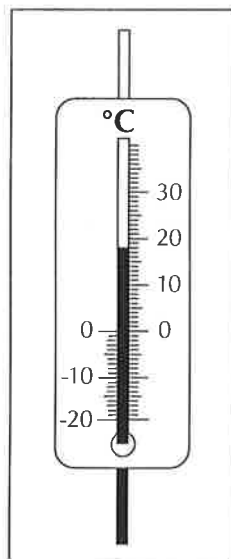
17. példa

Mennyi volt, hogyan változott és mennyi lett a hőmérséklet? (1.56. ábra)

a) Töltsd ki a táblázat hiányzó részét! (↑ : emelkedett, ↓ : csökkent)

b*) Jegyezd le művelettel is a hőmérséklet változását!

Ennyi volt	Így változott	Ennyi lett	Művelettel*
2 °C	↓	3 °C	
-4 °C	↑	9 °C	
-1 °C	↓	5 °C	
6 °C		-3 °C	
-8 °C		1 °C	
	↑	3 °C	-4 °C



Megoldás

Ennyi volt	Így változott	Ennyi lett	Művelettel*
2 °C	↓	3 °C	-1 °C $2\text{ °C} - 3\text{ °C} = -1\text{ °C}$
-4 °C	↑	9 °C	5 °C $-4\text{ °C} + 9\text{ °C} = 5\text{ °C}$
-1 °C	↓	5 °C	-6 °C $-1\text{ °C} - 5\text{ °C} = -6\text{ °C}$
6 °C	↓	9 °C	-3 °C $6\text{ °C} - 9\text{ °C} = -3\text{ °C}$
-8 °C	↑	9 °C	1 °C $-8\text{ °C} + 9\text{ °C} = 1\text{ °C}$
-7 °C	↑	3 °C	-4 °C $-7\text{ °C} + 3\text{ °C} = -4\text{ °C}$

1.56. ábra

Az anyagi helyzetek változásánál – ugyanúgy, mint a természetes számok körében – a hozzáadásnak összeadás, az elvételnek pedig kivonás felel meg. Ebben a modellben már negatív értékek hozzáadása, illetve elvétele is megjelenhet.

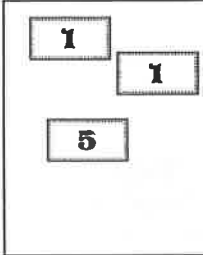
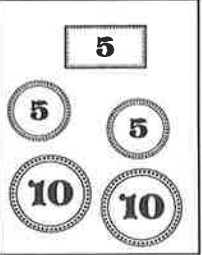
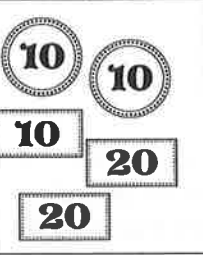
18. példa

Rajzolj a keretbe a hozzáadásnak megfelelően! Hogyan változott az anyagi helyzet? (1.57. ábra)

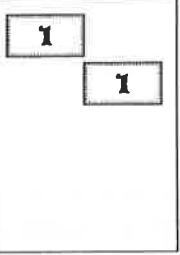
*Jegyezd le összeadással is!

Megoldás

Az a) feladatrészt megoldása. (1.58. ábra)

a)	b)	c)
		
volt: -2 Ft	volt: -5 Ft	volt: 20 Ft
hozzá-tettem: -5 Ft	hozzá-tettem: 30 Ft	hozzá-tettem: -50 Ft
lett: -7 Ft	lett: 25 Ft	lett: -30 Ft
$-2 \text{ Ft} + (-5 \text{ Ft}) = -7 \text{ Ft}$	$-5 \text{ Ft} + 30 \text{ Ft} = 25 \text{ Ft}$	$20 \text{ Ft} + (-50 \text{ Ft}) = -30 \text{ Ft}$

1.57. ábra

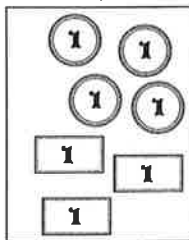
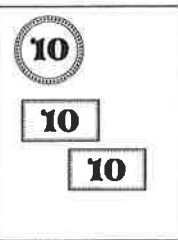
a)

volt: Ft
hozzá-tettem: -5 Ft
lett: Ft
*

1.58. ábra

19. példa

Áthúzással jelöld az elvételt! Hogyan változott az anyagi helyzet? (1.59. ábra)

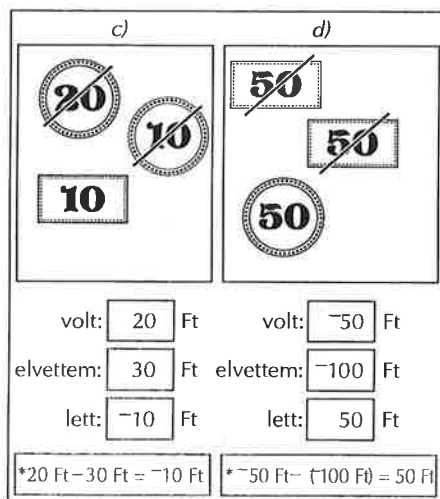
*Jegyezd le kivonással is!

a)	b)	c)	d)
			
volt: Ft	volt: Ft	volt: Ft	volt: Ft
elvettem: 3 Ft	elvettem: -10 Ft	elvettem: 30 Ft	elvettem: -100 Ft
lett: Ft	lett: Ft	lett: Ft	lett: Ft
*	*	*	*

1.59. ábra

Megoldás

Adósság elvételénél a műveleti lejegyzésben negatív számot kell kivonni. Akár készpénz, akár adósság elvételénél szükség lehet arra, hogy az anyagi helyzethez először 0 Ft-ot, ugyanannyi készpénzt és adósságot adjunk. Ennek megfelelően a *c)* és a *d)* feladatrészek megoldása (1.60. ábra):



1.60. ábra

1.7. A természetes szám fogalmának bővítése: a racionális szám fogalmának alakítása

A természetes számkör alsó tagozatos bővítésekor (a negatív egészek bevezetése mellett) a pozitív racionális szám fogalmát alakítjuk ki anélkül, hogy ezt a megnevezést használnánk.

Az egész számfogalom alakításához hasonlóan a törtek bevezetése is szemléletes úton történik. Származtatásukhoz, nagyságrendi összehasonlításukhoz és gyakorlati alkalmazásukhoz sok-sok tevékenységen keresztül megszerezhető tapasztalatra van szükség.

1.7.1. Tötrészek és törtszámok egymáshoz rendelése

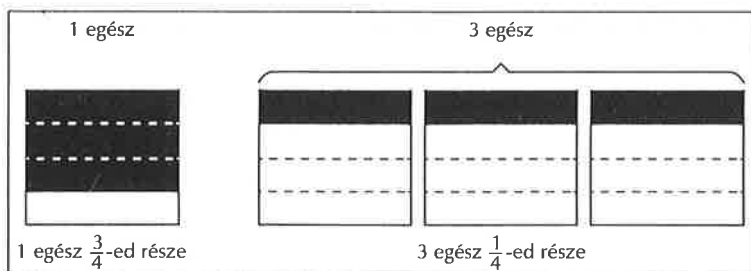
A törtszámokat 3. évfolyamon mennyiségek törtrészeinek számszerűsítésére, számmal való kifejezésére vezetjük be. Az értelmezést megkönnyítik az egyenlő részekre osztásban szerzett 2. évfolyamos tapasztalatok (lásd 1.3.4. fejezet). A tanulók a valahányad részt a darabszám vagy a mérőszám egész számmal való osztási hányadosaként kaphatták meg nulla maradékot adó osztási feladatokban. Például egy 12 cm hosszú szakasz harmadrésze: $12 \text{ cm} : 3 = 4 \text{ cm}$.

A törtszámok bevezetésekor mérhető mennyiségekből indulunk ki, de kezdetben nincs szükségünk a mérőszám és a mértékegység ismeretére. Az adott mennyiséget (hosszúságot, területet, térfogatot, szöget, úrtartalmat, tömeget,

időtartamot) 1 egésznek tekintjük, 1-nek vesszük. Ha az így értelmezett egészet n egyenlő részre osztjuk és ezekből m részt veszünk, akkor ugyanazt a mennyiséget kapjuk, mint m számú egész n egyenlő részre osztásakor:

1 egész $\frac{m}{n}$ -ed része ugyanannyi, mint m egész n -ed része.

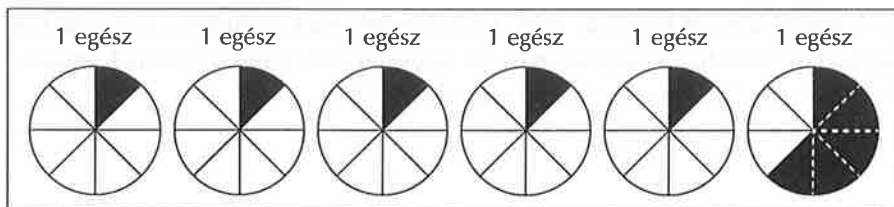
Egyenlőségük miatt mindkét mennyiséget egy új, $\frac{m}{n}$ alakban lejegyzett számmal fogjuk megadni, amelyet törtszámnak nevezünk (törtszám névre keresztelünk). A $\frac{3}{4}$ kétféle értelmezését szemlélteti az ábra (1.61. ábra):



1.61. ábra

Az első értelmezésre az egységtörtek, majd ezek többszöröseinek bevezetése miatt van szükség. A második értelmezés szemléltetése azért körülményesebb, mert az egészet meg kell sokszoroznunk, és általában mindegyik egészen végre kell hajtunk az egyenlő részekre osztást.

Néhány osztozkodási problémán keresztül fedeztessük fel, hogy a második értelmezés is ugyanazt a mennyiséget számszerűsíti. Ha például 5 egész sajton 8 kisegér osztozkodik igazságosan, akkor $\frac{5}{8}$ sajt jut mindegyik egérnek. Más szóval 5 egész 8-ad része (az egész $\frac{1}{8}$ részeinek egyesítése) ugyanannyi, mint 1 egész $\frac{5}{8}$ része (1.62. ábra):



1.62. ábra

A továbbiakban a törtszámokkal összefüggő tapasztalatszerzésben az első értelmezést tekintjük meghatározónak, amely alkalmas egyúttal a tizedes törtek 5. évfolyamos előkészítésére is.

A fejezetcímben szereplő „egymáshoz rendelés” kifejezés kétirányú tevékenységet takar. Egyrészt a törteknek megfelelő törtrészek előállítását, másrészt az 1 egész törtrészeinek számszerűsítését. Fontos, hogy ezt a – matematikatanításban oly gyakran alkalmazott – kétirányúságot a törtfogalom kialakításakor is vegyük figyelembe.

Egységtörtek

Ha az 1 egésznek tekintett mennyiséget n egyenlő részre osztjuk, és ezekből a részekből csak 1-et veszünk, akkor ezt a mennyiséget az $\frac{1}{n}$ egységtörttel számszerűsíthetjük. Az 1 egészet valóságos tárgy (alma, torta, csokoládé, óraszámlop, papírlap, színes rúd stb.) vagy rajz (szakasz, síkidom) formájában jeleníthetjük meg, amely valóságos tárgyat is szimbolizálhat. Például egy tortát körlappal helyettesíthetünk.

Természetesen a mennyiségek egyenlő részekre osztásakor tudnunk kell, hogy az milyen mérhető tulajdonság (hosszúság, terület, tömeg, űrtartalom, ...) alapján történik. Ez a legtöbb feladatnál nyilvánvaló, ezért csak akkor érdemes beszélnünk róla, ha az nem egyértelmű. Bizonyos esetekben több olyan tulajdonság is megadható (például színes rudaknál a hosszúság, a térfogat, a tömeg vagy az alapterület), amelyek mindegyike ugyanazt a felosztást eredményezi.

Az egységtörtek bevezetését összekapcsolhatjuk egyenlő részekre osztási tevékenységgel, például papírhajtogatással, szőnyegezéssel, szakaszok vagy síkidomok felosztásával.

3. évfolyamon a törtek számlálóját számmal, nevezőjét viszont betűvel szokás megadni (például 2 harmad, 4 ötöd). Ez az írásmód kezdetben azért hasznos, mert így formailag is elkülönül a számláló és a nevező eltérő jelentése, elkerülhető vele azok felcserélése.

Az egységtörteknél az 1-et nem kötelező leírni vagy kimondani (például az 1 ketted helyett írhatunk vagy mondhatunk felet, kettedet). Ugyanakkor segítséget jelenthet a folytatásban (az egységtörtek többszöröseinek megértésében és jelölésében), ha az 1-et nem hagyjuk el.

Egy magyarázó példa az egységtörtek bevezetéséhez:

Mit látsz a táblán? (Egy körlapot.) (1.63. ábra)

Hány egyenlő részre van felosztva? (Három egyenlő részre.)

Hogyan tudnád igazolni, hogy ezek valóban egyenlő területű körcikkek? (Ha egymásra helyezük őket, akkor pontosan fedik egymást. Azt is mondhatjuk, hogy egybevágóak.)

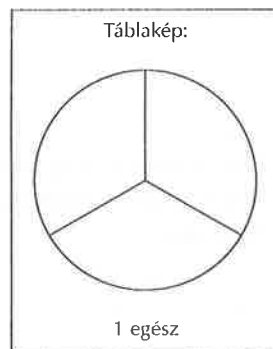
Ha a körlapot egy tortának tekintenénk, ami 960 Ft-ba kerül, akkor mennyit fizetnénk egy ilyen szeletért? (A 960 Ft-nak a harmadrészét, azaz 320 Ft-ot.)

Ha most a teljes körlapot 1-nek (1 egésznek) vesszük, akkor mennyit ér ezekből a körcikkekből egy darab? (Az 1-nek a harmadrészét.)

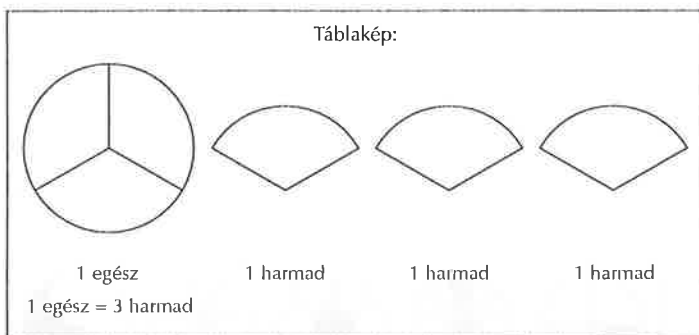
Ezt a számot így jegyezzük le: 1 harmad. Az 1 harmad se nem természetes szám, se nem egész szám. Törtszámnak nevezzük, mert egy törtresz (jelen esetben egy körcikk) nagyságát (területét) tudtuk megadni vele.

Ha mindegyik körcikk alá 1 harmadot írunk (1.64. ábra), és ezeket a számokat összeadjuk, akkor mennyit kapunk? (1-et, mert visszakapjuk az 1 egészet.)

Hány harmad tehát az 1 egész? (3 harmad.)



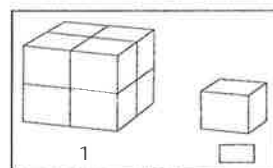
1.63. ábra



1.64. ábra

1. példa

Fehér kockákból építs egy nagyobb kockát az ábra szerint! Ha ez a nagyobb kocka 1-et ér, akkor mennyit ér 1 fehér kocka? Írd a keretbe! (1.65. ábra)



1.65. ábra

Megjegyzés:

A példa valójában egy mérhető mennyiség, a térfogat törtrészének meghatározását kéri. 1 fehér kocka térfogata a nagy kocka térfogatának 1 nyolcad része.

2. példa

Szönyegezd a zöld rudat egyszínű rudakkal, többféleképpen! Ha a zöld rúd 1-et ér, akkor mennyit ér a többi rúdból 1 darab? Írd a vonalakra!

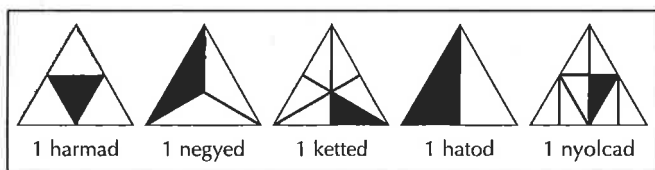
1 lila rúd: _____ 1 piros rúd: _____
1 világoskék rúd: _____ 1 rózsaszín rúd: _____
1 fehér kiskocka: _____

Könnyítést jelent, ha az egységtörteket már eleve egybevágó vagy egyenlő területű részeket tartalmazó alakzatok egy-egy részéhez kell hozzárendelni:

3. példa

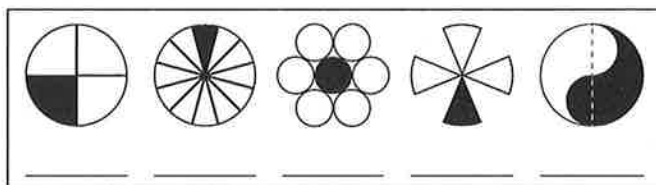
Mindegyik rajz 1 egészet ér.

a) Kösd össze vonalzóval a rajzok színezett részét a megfelelő törtszámmal! (1.66. ábra)



1.66. ábra

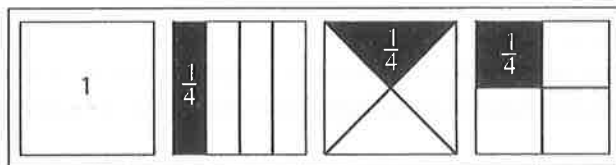
b) Mennyit ér a színezett rész? Írd a megfelelő törtszámokat a vonalakra! (1.67. ábra)



1.67. ábra

Arra is mutassunk példát, hogy ugyanannak a mennyiségnek az egyenlő részekre osztását többféleképpen is el lehet végezni. Például egy négyzet

alakú papírlapot a szimmetriatengelyei mentén 4-féleképpen hajthatunk félbe (1.68. ábra), egy sakktábla mezőit sokféleképpen csoportosíthatjuk úgy, hogy nyolc egyenlő részt kapjunk; három tábla csokoládét hat gyerek nem csak egyféleképpen oszthat el igazságosan és így tovább.

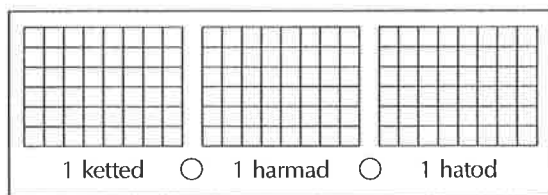


1.68. ábra

Az egységtörtek páronkénti összehasonlításának, majd rendezésének alapja az a felismerés, hogy az egységül választott mennyiséget több (kevesebb) egyenlő részre osztva 1 rész kisebb (nagyobb) lesz. Ezt a törvényszerűséget már a 2. évfolyamon is tapasztalhatták a tanulók az egyenlő részekre osztás tanulásakor (lásd 1.4.2. fejezet).

4. példa

Mindegyik téglalap 1 egészet ér. Színezz ügyesen a törteknek megfelelően! Hasonlítsd össze a törteket! Írj < vagy > jelet a karikákba! (1.69. ábra)



1.69. ábra

Megjegyzés:

Ha sorokat színeznek a gyerekek, akkor összeszámlálás nélkül, ránézésre is megállapíthatják, hogy melyik törtrész, illetve törtszám a nagyobb.

Különösen hasznosak azok a komplex feladatok, amelyek az egyenlő részekre osztást, az egységtörteknek megfelelő mennyiségek előállítását és az egységtörtek összehasonlítását egyaránt tartalmazzák.

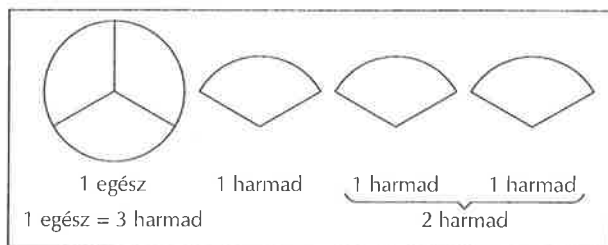
5. példa

Hajts félbe egy írólapot négyszer egymás után! Kétszer az egyik, kétszer a másik irányba hajtogass!

- Széthajtogatás után vonalkázd kékre az egész írólap 1 negyed részét, sárgára az 1 ketted részét, zöldre az 1 tizenhatod részét és barnára az 1 nyolcad részét!
- Hasonlítsd össze a törteket, és rendezd őket csökkenő sorrendbe!
- Az írólap mekkora része maradt fehér? Törtszámmal add meg!

Egységtörtek többszörösei

Az egységtörtek többszöröseinek tanításakor két lényeges dologra kell felhívunk a gyerekek figyelmét. Egyrészt figyeljék meg azt, hogy hány egyenlő részre osztjuk az egészet, másrészt hogy a részekből hányat veszünk. Indíthatjuk a problémát az egységtörtek előállításának folytatásaként azzal a kérdésfelvetéssel, hogy az 1 egésznek mekkora részét nem vettük figyelembe (nem raktuk ki, nem színeztük ki stb.). Visszaulva például az egységtörtek bevezető feladatára (1.70. ábra):

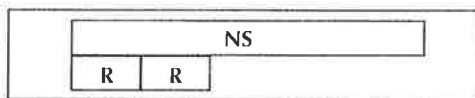


1.70. ábra

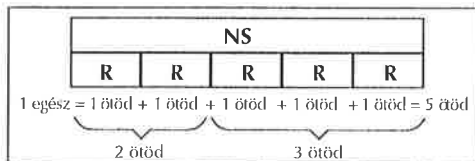
Az értelmezéssel párhuzamosan – egyúttal az összeadás és a kivonás előkészítéseként – azt is megmutathatjuk, hogy az 1-et azonos nevezőjű tört összegére hogyan bonthatjuk fel.

Egy magyarázó példa (1.71. ábra): A narancssárga rudat két rózsaszín rúddal kezdtük el kirakni. Mekkora részét raktuk már ki? Mekkora részét nem raktuk még ki?

Először fejezzük be a szőnyegezést, hogy megtudjuk, hány egyenlő részre osztottuk az egészet! (1.72. ábra)



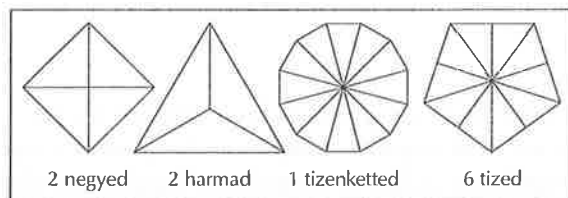
1.71. ábra



1.72. ábra

6. példa

Mindegyik rajz 1 egészet ér. Színezz a megadott törteknek megfelelően! (1.73. ábra)



1.73. ábra

7. példa

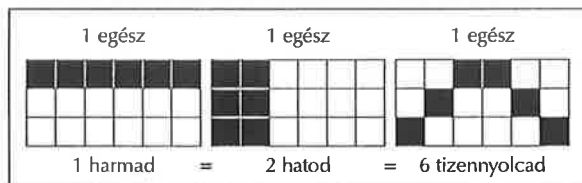
Mekkora része az egésznek a szürke rész? Mekkora része fehér?

Jegyezd le az egészet a szürke és a fehér részek összegeként! (1.74. ábra)

Fekete rész:	Fehér rész:	
1 egész =	+	=
Fekete rész:	Fehér rész:	
1 egész =	+	=
Fekete rész:	Fehér rész:	
1 egész =	+	=

1.74. ábra

Ugyanannak az egésznek ugyanakkora törtrészeit többféleképpen is előállíthatjuk, és ettől függően ugyanannak a törtszámnak más-más törtalakját kapjuk. Azt is mondhatjuk, hogy egy törtnek többféle neve van. (1.75. ábra)
Például:



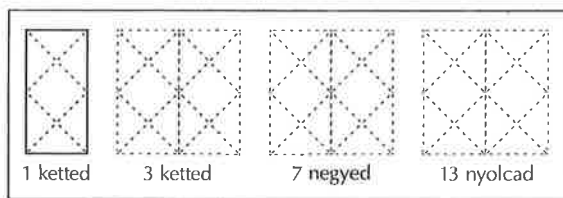
1.75. ábra

A törtek egyenlőségének felfedeztetése alsó tagozaton nem tévesztendő össze a törtek formális egyszerűsítésével, illetve bővítésével. Ebben a példában sem az 1 harmad bővítései vagy a 6 tizenhatszad egyszerűsítései alapján színeztünk. Mindhárom esetben az 1 harmad részt (6 kis négyzetet) színeztük ki három különböző módon, amelyeknek három különböző alakú, de egymással megegyező törtszámmal feleltettünk meg.

Néhány feladat erejéig – még a törtek nagyságrendi összehasonlítása előtt – célszerű kitérni az 1-nél nagyobb törtekre is. Ha csak az 1 egésznek megfelelő objektum van jelen, akkor az ilyen törtek elképzelése absztrakt gondolkodást vár el a tanulóktól. Nem lehet felmutatni például egy tábla csokinak mondjuk az 5 negyed részét. Ezért segítséget jelent, ha az 1 egész több példányát tételezzük fel.

8. példa

A téglalap (az első síkidom) területét válaszd mindig 1-nek! Rajzolj olyan sokszöget, amelynek területe a megadott törtszámmal fejezhető ki! (1.76. ábra)



1.76. ábra

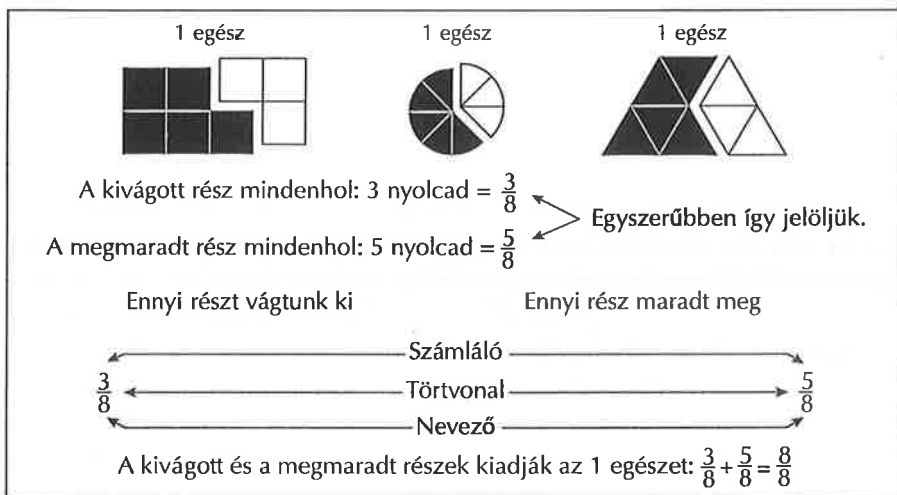
Megjegyzés:

A rajzolás előtt beszéljük meg, hogy az 1 kettednek, az 1 negyednek, illetve az 1 nyolcadnak melyik alakzat (négyzet, háromszög) feleltethető meg!

A 4. évfolyamon a témakör bővülését a törtek „felnöttes” írásmódja, a számláló és nevező fogalmának bevezetése, valamint az egymást 1-re kiegészítő törtek műveletszintű kapcsolatának megismerése jelenti.

Egy bevezető (magyarázó) példa:

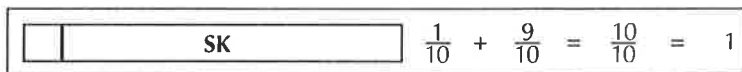
Mindegyik síkidomot 8 egyenlő részre osztottuk fel. A síkidomok 3 nyolcad részét ollóval kivágtuk, majd a megmaradt részt kiszíneztük (1.77. ábra):



1.77. ábra

9. példa

A narancssárga rudat 1 fehér és egy sötétkék rúddal raktuk ki (1.78. ábra):



1.78. ábra

Szönyegezd a narancssárga rudat két rúddal, másféleképpen is! Írd fel az 1-et két tört összegeként, a szönyegezések segítségével!

10. példa

A zöld rudat 1-nek válaszd! Szönyegezd a számtannyelvű lejegyzéseknek megfelelően, és pótolod a hiányzó számokat a törtekben!

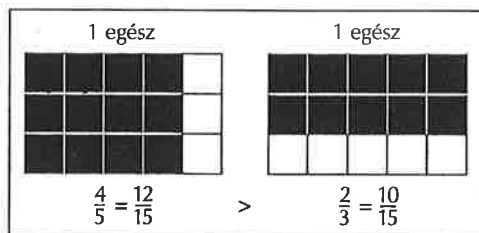
a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = 1$ $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = 1$ $\frac{2}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = 1$

b) $\frac{4}{6} + \frac{\boxed{}}{6} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = 1$ $\frac{5}{12} + \frac{\boxed{}}{12} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = 1$ $\frac{4}{12} + \frac{\boxed{}}{12} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = 1$

Megjegyzés:

A törtek nevezői arról árulkodnak, hogy hány db egyforma rúddal szönyegezhetjük a zöld rudat. Ennek figyelembevételével kell a tanulóknak a kiegészítéseket elvégezni, ami egyúttal megkönnyíti a hiányzó számok pótlását.

közös nevezőre hozást teszi szemléletessé. Rajzoljunk két olyan, egymással egybevágó téglalapot a négyzethálóra, amelynek oldalhosszúságai a két tört nevezőjével egyeznek meg, majd színezzük ki őket a törteknek megfelelően! A részek összeszámlálásával könnyen eldönthetjük, hogy melyik tört a nagyobb, sőt azt is megtudhatjuk, hogy mennyivel. Például a $\frac{4}{5}$ -öt és a $\frac{2}{3}$ -ot így hasonlíthatjuk össze (1.81. ábra):



1.81. ábra

A $\frac{4}{5}$ tehát nagyobb, mint a $\frac{2}{3}$.

Ily módon a különböző nevezőjű törték összehasonlítását a II. alapesetre, az egyenlő nevezőjű törték összehasonlítására vezethetjük vissza.

Törték ábrázolása a számegyenesen

A törték számegyenesen való elhelyezésének tapasztalati alapját az egységül választott szakasz törtreszeinek előállításja jelenti. Ezzel átmenetet valósíthatunk meg a törtszám mint valamely egész törtresze, illetve a törtszám mint absztrakt fogalom között.

Az egységszakasz minden esetben a számegyenes 0 és 1 pontja által meghatározott intervallum. Az 1-nél kisebb törték elhelyezésénél célszerű hosszabb szakaszt felvenni, míg az 1-nél nagyobb törték szemléltetésénél az egységszakaszon túli számelhelyezésekre is gondolnunk kell. Nem mindig fontos az egységszakasz pontos felosztása, ennek körülbelüli megállapításával a tanulók arányérzékét is fejleszthetjük.

15. példa

Jelöld az 1 harmad, a 4 ötöd, a 3 ketted és a 7 negyed körülbelüli helyét a számegyenesen! (1.82. ábra)



1.82. ábra

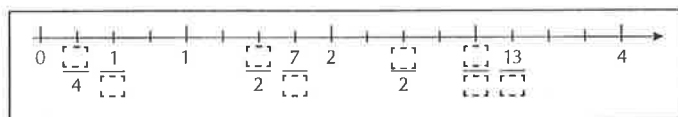
Megjegyzés:

A négy tört helyét négy egymás alatti (azonos beosztású) számegyenesen külön-külön is elhelyezhetik a tanulók, majd egy ötödik számegyenesre átmásolhatják azokat.

Bizonyos feladatoknál az egységszakasz felosztása előre adott, ilyenkor a nehézséget a tájékozódás jelenti.

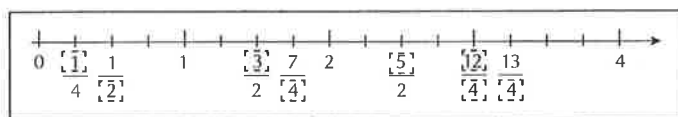
16. példa

Írd be a számegyenes alatti törték hiányzó számlálóját, illetve nevezőjét! (1.83/a, b ábra)



1.83/a ábra

Megoldás



1.83/b ábra

A $\frac{12}{4}$ helyett természetesen a $\frac{6}{2}$ vagy a $\frac{3}{1}$ beírása is helyes.

1.7.3. Mennyiségek és számok törtrészeinek meghatározása művelettel

A törtszám fogalmi kialakításakor nem volt szükség a mennyiségek valódi nagyságának ismeretére. Az egyszerűség kedvéért eltekintettünk attól, hogy a mennyiség mérőszámmal és mértékegységgel kifejezve mekkora. 1 egységnek vettük, és a törtrészeihez törtszámokat rendeltünk.

A törtrészek előállítása általában két tevékenység egymás utáni végrehajtását jelentette: az 1 egészet annyi egyenlő részre osztottuk, amennyi a tört nevezője, majd az így kapott részekből annyit vettünk, amennyi a tört számlálója. Az előbbi tevékenység a „műveletek nyelvén” osztást, az utóbbi pedig ismételt összeadást, vagyis szorzást jelent.

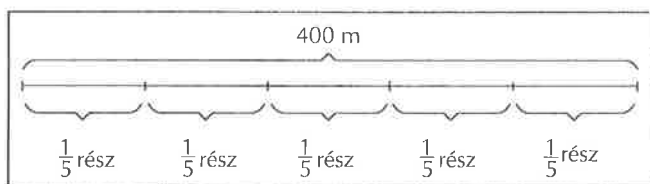
Amikor – mérőszámmal és mértékegységgel megadott – mennyiségek vagy számok törtrészeit akarjuk meghatározni, akkor ugyanezt a két műveletet kell egymás után elvégeznünk. Először tehát osztunk, azután

szorzunk. Ha a részekből csak 1-et kell vennünk, akkor szorzásra nincs is szükség.

Egy-egy, a 4. évfolyamnak szánt magyarázó példa a mennyiségek, illetve számok törtrészeinek meghatározására:

a) Péter a 400 m-es futóversenyen a táv $\frac{3}{5}$ részét már megtette. Hány m-t tett meg eddig?

Vegyük fel egy (például 3 cm-es) szakaszt egymás után 5-ször, és a 400 m-nek feleltessük meg a teljes hosszúságot (jelen esetben 15 cm-t) (1.84. ábra):



Először számítsuk ki a 400 m-nek az $\frac{1}{5}$, majd a $\frac{3}{5}$ részét!

$$400 \text{ m} : 5 = 80 \text{ m} \left(\frac{1}{5} \text{ rész} \right)$$

$$3 \cdot 80 \text{ m} = 240 \text{ m} \left(\frac{3}{5} \text{ rész} \right)$$

Péter tehát 240 m-t tett meg eddig.

b) Számítsuk ki a 896 m-nek a $\frac{4}{7}$ részét!

Először számítsuk ki (írásbeli osztással, illetve szorzással) a 896 m-nek az $\frac{1}{7}$, majd a $\frac{4}{7}$ részét!

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 9 \cdot 6 : 7 = 1 \ 2 \ 8 \\ 1 \ 9 \\ 5 \ 6 \\ 0 \end{array} \qquad \frac{1 \ 2 \ 8}{5 \ 1 \ 2} \cdot 4$$

A 896 m-nek a $\frac{4}{7}$ része tehát 512.

3–4. évfolyamon a mennyiségek törtrészeinek számítással való meghatározását mérésrel kapcsolatos feladatokon keresztül változatosan gyakoroltathatjuk. Ezek a feladatok jó lehetőséget kínálnak egyúttal a mértékváltások gyakorlására is.

17. példa

Barbara a hétköznapok 2 hatodát alvással, 1 nyolcadát tanulással, 1 tizenkettedét edzéssel, 5 huszonnegyedét játékkal és 1 negyedét az iskolában tölti. Hány órát tesznek ki Barbara programjai külön-külön és összesen?

Megjegyzés:

A megadott tevékenységek Barbara teljes napját kitöltik:

$$8 \text{ óra} + 3 \text{ óra} + 2 \text{ óra} + 5 \text{ óra} + 6 \text{ óra} = 24 \text{ óra.}$$

Ha ezt a tényt előre közöljük a tanulókkal, akkor saját maguk ellenőrizhetik, hogy jól számoltak-e.

18. példa

A matematikaóra $\frac{2}{9}$ része már eltelt. Hány perc van még hátra?

Megoldás

Számítsuk ki először a 45 perc 1 kilenced részét: $45 \text{ perc} : 9 = 5 \text{ perc}$.

Ezután kétféleképpen is számolhatunk:

$$a) 2 \cdot 5 \text{ perc} = 10 \text{ perc} \quad \left(\frac{2}{9} \text{ rész}\right)$$

$$45 \text{ perc} - 10 \text{ perc} = 35 \text{ perc.}$$

$$b) \text{ A hátralévő idő a } 45 \text{ perc } 7 \text{ kilenced része: } 7 \cdot 5 \text{ perc} = 35 \text{ perc}$$

1.7.4. Következtetés törtrésről egészre

Ha az egész $\frac{m}{n}$ -ed részét ismerjük, és az egészet, vagyis az $\frac{m}{n}$ -ed részt keressük, akkor ehhez az $\frac{1}{n}$ -ed részt n -szer kell vennünk. Ennek az egyszerű, kétlépéses eljárásnak a tanítás számára az a mondanivalója, hogy először mindig az egységtörtnek megfelelő részt kell előállítanunk (felosztással, illetve osztással), majd ezt annyiszor kell vennünk, amennyi az egységtört nevezője (egyesítéssel, illetve szorzással).

Az 1 egész előállítása törtrészenek ismeretében

Ezeknél a feladatoknál a törtszámmal megadott törtrésznek valamilyen geometriai alakzat (szakasz, síkidom vagy test) felel meg, és az 1 egészet is valamilyen alakzat formájában keressük. Egyszerűbbek azok az egy lépéses esetek, amikor a törtrész egységtörttel van megadva (például egy rózsaszín rúd felel meg 1 harmadnak). Nehezebb esetben egységtörtek többszöröseivel adjuk meg a törtrészeket:

19. példa

Egészítsd ki a narancssárga rudat 1 egészre, ha a narancssárga rúd az egész 2 harmada!

Fedeztessük fel a tanulókkal azt az egyszerű ténnyt, hogy ha ugyanazzal a törttel különböző törtreszeket adunk meg, akkor az egészek is különböznek. Vegyük például az előző feladatban szereplő narancssárga rúd helyett a zöld rudat.

Azt is tapasztalhatják a gyerekek, hogy amikor a törtresz 1-nél kisebb (nagyobb) törttel van megadva, akkor az egész nagyobb (kisebb), mint a megadott törtresz.

20. példa

Melyik az a színes rúd, amelynek

- a) 3 ötöd része a lila rúddal megegyező hosszúságú?
- b) 5 nyolcad része a narancssárga rúddal megegyező hosszúságú?
- c) 9 heted része a sötétkék rúddal megegyező hosszúságú?

Megoldás

a) A lila rúd 6 db fehér kockával (vagy 3 db rózsaszín rúddal) rakható ki. Ha ez a 3 ötöd rész, akkor a kérdéses rúd 1 ötöd része 2 db fehér kockának (vagy 1 db rózsaszín rúdnak) felel meg. Így a kérdéses rúd $5 \cdot 2 \text{ db} = 10 \text{ db}$ fehér kockával (vagy $5 \cdot 1 \text{ db} = 5 \text{ db}$ rózsaszín rúddal) rakható ki, ez pedig a narancssárga rúd.

Hasonló okoskodással kaphatjuk meg a b) és a c) feladatrészek megoldásait (barna, illetve fekete rúd).

Következtetés mennyiségre, számra törtreszei alapján

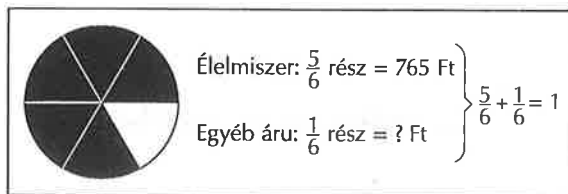
Ebben az esetben is a műveletek nyelvére (osztásra, majd szorzásra) kell lefordítanunk azt a tevékenységet, amikor a törtresz birtokában az ismeretlen mennyiségre vagy számra következtetünk.

Egy, a 4. évfolyamnak szánt magyarázó példa:

Édesanya egy élelmiszerboltban vásárolt. Az elköltött pénz $\frac{5}{6}$ részéért élelmiszert vett.

Hány Ft-ot költött összesen, ha az élelmiszerért 765 Ft-ot fizetett?

Osszunk fel egy körlapot 6 egyenlő részre, majd színezzük ki az $\frac{5}{6}$ részét!
(1.85. ábra)



1.85. ábra

Számítsuk ki először az elköltött pénznek az $\frac{1}{6}$, majd a $\frac{6}{6}$ részét!

$$\begin{array}{r} 7 \cdot 6 \cdot 5 : 5 = 1 \ 5 \ 3 \\ 2 \ 6 \\ 1 \ 5 \\ 0 \end{array}$$

Az elköltött pénz $\frac{1}{6}$ része = 153 Ft

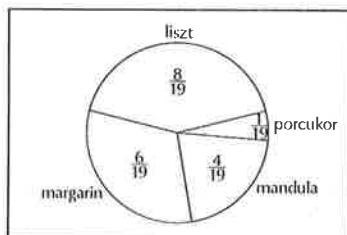
$$\frac{1 \ 5 \ 3}{9 \ 1 \ 8} \cdot 6$$

Az elköltött pénz, azaz a $\frac{6}{6}$ rész = 918 Ft

Ellenőrzés: 918 Ft-nak az $\frac{5}{6}$ része = $(918 \text{ Ft} : 6) \cdot 5 = 765 \text{ Ft}$.

21. példa

Egy sütemény elkészítéséhez négyféle dologra van szükség. Tanulmányozd a kördiagramon, hogy az összes hozzávalónak mekkora részét teszik ki az egyes alapanyagok!
(1.86. ábra)



1.86. ábra

- Mennyi alapanyagra volt szükség összesen, ha 12 dkg mandulát használtunk fel?
- Számítsd ki, hogy hány dkg-ra volt szükség a másik három élelmiszerből!
- Ellenőrizd összeadással az a) kérdésre adott válaszodat!

Megoldás

- Ha a $\frac{4}{19}$ rész 12 dkg-ot jelent, akkor az $\frac{1}{19}$ résznek $12 \text{ dkg} : 4 = 3 \text{ dkg}$, a $\frac{19}{19}$ résznek (az összes alapanyag) pedig $19 \cdot 3 \text{ dkg} = 57 \text{ dkg}$ felel meg.
- Porcukorból 3 dkg, lisztből $8 \cdot 3 \text{ dkg} = 24 \text{ dkg}$, margarinból $6 \cdot 3 \text{ dkg} = 18 \text{ dkg}$ kellett.
- $12 \text{ dkg} + 3 \text{ dkg} + 24 \text{ dkg} + 18 \text{ dkg} = 57 \text{ dkg}$.

2. Halmazok, logika

2.1. A halmazok és a logika szerepe az iskolai matematikai tevékenységben

A halmazok és a matematikai logika témakörök egymással szoros analóg kapcsolatban a tantervekben „Gondolkodási módszerek” címszó alatt összefoglalt követelményekhez kapcsolódó anyagrészek. Megjelennek a többi nagy témakör feldolgozásában (számтан–algebra, relációk–függvények–sorozatok, geometria–mérések, kombinatorika–valószínűség–statisztika). Egy-egy témakörön belül pedig szerepelhetnek az ismeretelsajátítás előkészítő szakaszában, az aktuális tananyag feldolgozásában, a tanultak megszilárdításában, begyakoroltatásában, akkor, amikor a tanultakat a tanuló matematikai műveltségébe beépítjük, és akkor is, amikor a tanultakat ismétljük.

Már az óvodában és az alsó tagozaton, de később is arra törekszünk, hogy halmazszemléletet alakítsunk ki a tanulóknál úgy, hogy a megtapasztalt fogalmakat, a halmazműveleteket eszközként tudják használni majd az összes matematikai témakörben a feladatok megoldásához, az új ismeretek kialakításához ugyanúgy, mint a nem kifejezetten matematikai tevékenységekben.

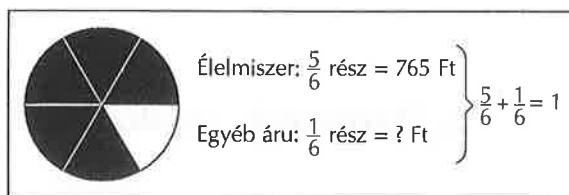
Az iskolás kor előtt, de az 1–2. évfolyamon is a tárgyak különböző látható, tapintható, hallható tulajdonságait ismertetjük fel egymástól elkülönítve. Például a tárgyakat megkülönböztetjük tömegük, térfogatuk alapján vagy a felületük érdekessége, simasága, folytonossága alapján vagy az alakjuk (domború, homorú, szögletes, sík stb.), a színük, esetleg a hangjuk, a hangszínük alapján. A tevékenységek kapcsán tudatosulnak a tárgyak, élőlények különböző tulajdonságai, ami alapja lesz a későbbi összehasonlításoknak.

Az ismeretszerzésnek ebben a korábbi periódusában is hatékonyan tudjuk alkalmazni az állítások megfogalmazását, a halmazok kialakítását gyakoroltató másoló, kitalálás, változtatós játékokat.

Példák másoló játékokra:

Rakd ki ugyanazokat az elemeket, építsd fel ugyanazt az alakzatot, végezd

Osszunk fel egy körlapot 6 egyenlő részre, majd színezzük ki az $\frac{5}{6}$ részét!
(1.85. ábra)



1.85. ábra

Számítsuk ki először az elköltött pénznek az $\frac{1}{6}$, majd a $\frac{6}{6}$ részét!

$$\begin{array}{r} 7' \ 6' \ 5' : 5 = 1 \ 5 \ 3 \\ 2 \ 6 \\ 1 \ 5 \\ 0 \end{array}$$

Az elköltött pénz $\frac{1}{6}$ része = 153 Ft

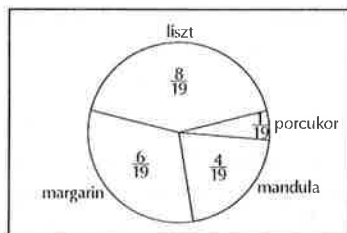
$$\frac{1 \ 5 \ 3}{9 \ 1 \ 8} \cdot 6$$

Az elköltött pénz, azaz a $\frac{6}{6}$ rész = 918 Ft

Ellenőrzés: 918 Ft-nak az $\frac{5}{6}$ része = $(918 \text{ Ft} : 6) \cdot 5 = 765 \text{ Ft}$.

21. példa

Egy sütemény elkészítéséhez négyféle dologra van szükség. Tanulmányozd a kördiagramon, hogy az összes hozzávalónak mekkora részét teszik ki az egyes alapanyagok!
(1.86. ábra)



1.86. ábra

- Mennyi alapanyagra volt szükség összesen, ha 12 dkg mandulát használtunk fel?
- Számítsd ki, hogy hány dkg-ra volt szükség a másik három élelmiszerből!
- Ellenőrizd összeadással az a) kérdésre adott válaszodat!

Megoldás

- Ha a $\frac{4}{19}$ rész 12 dkg-ot jelent, akkor az $\frac{1}{19}$ résznek $12 \text{ dkg} : 4 = 3 \text{ dkg}$, a $\frac{19}{19}$ résznek (az összes alapanyagának) pedig $19 \cdot 3 \text{ dkg} = 57 \text{ dkg}$ felel meg.
- Porcukorból 3 dkg, lisztből $8 \cdot 3 \text{ dkg} = 24 \text{ dkg}$, margarinból $6 \cdot 3 \text{ dkg} = 18 \text{ dkg}$ kellett.
- $12 \text{ dkg} + 3 \text{ dkg} + 24 \text{ dkg} + 18 \text{ dkg} = 57 \text{ dkg}$.

2. Halmazok, logika

2.1. A halmazok és a logika szerepe az iskolai matematikai tevékenységben

A halmazok és a matematikai logika témakörök egymással szoros analóg kapcsolatban a tantervekben „Gondolkodási módszerek” címszó alatt összefoglalt követelményekhez kapcsolódó anyagrészek. Megjelennek a többi nagy témakör feldolgozásában (számtan–algebra, relációk–függvények–sorozatok, geometria–mérések, kombinatorika–valószínűség–statisztika). Egy-egy témakörön belül pedig szerepelhetnek az ismeretsajátítás előkészítő szakaszában, az aktuális tananyag feldolgozásában, a tanultak megszilárdításában, begyakoroltatásában, akkor, amikor a tanultakat a tanuló matematikai műveltségébe beépítjük, és akkor is, amikor a tanultakat ismételjük.

Már az óvodában és az alsó tagozaton, de később is arra törekszünk, hogy halmazszemléletet alakítsunk ki a tanulóknál úgy, hogy a meg tapasztalt fogalmakat, a halmazműveleteket eszközként tudják használni majd az összes matematikai témakörben a feladatok megoldásához, az új ismeretek kialakításához ugyanúgy, mint a nem kifejezetten matematikai tevékenységekben.

Az iskolás kor előtt, de az 1–2. évfolyamon is a tárgyak különböző látható, tapintható, hallható tulajdonságait ismertetjük fel egymástól elkülönítve. Például a tárgyakat megkülönböztetjük tömegük, térfogatuk alapján vagy a felületük érdekessége, simasága, folytonossága alapján vagy az alakjuk (domború, homorú, szögletes, sík stb.), a színük, esetleg a hangjuk, a hangszínük alapján. A tevékenységek kapcsán tudatosulnak a tárgyak, élőlények különböző tulajdonságai, ami alapja lesz a későbbi összehasonlításoknak.

Az ismeretszerzésnek ebben a korábbi periódusában is hatékonyan tudjuk alkalmazni az állítások megfogalmazását, a halmazok kialakítását gyakoroltató másoló, kitalálás, változtatós játékokat.

Példák másoló játékokra:

Rakd ki ugyanazokat az elemeket, építsd fel ugyanazt az alakzatot, végezd

el ugyanazt a mozdulatsort, dobbants, tapsolj stb. ugyanannyit, mint valaki más, tapsold vissza ugyanazt a ritmust, énekeld el ugyanazt a dallamot stb.

Példák kitalálós játékokra:

Az ismert tárgyak közül egyet elrejtünk, a tanulónak ki kell találnia, melyik ez a tárgy (barkochba). Egy műanyag betűt, számot beteszünk egy zsákba vagy letakarunk egy kendővel. A gyermek feladata – anélkül, hogy látná az elrejtett tárgyat – hiányzó tárgyakra következtetni, vagy tapintással kitalálni, melyik tárgyat rejtettük el; vagy a hallott hangok közül ki kell találni, hogy kinek vagy minek a hangját hallottuk.

Példák változtatós játékokra:

Néhány elemű halmaz egyik elemét kicseréljük egy másikra: a feladat kitalálni, hogy melyik tárgyat melyikkel cseréltük ki. Ugyanennek a játéknak egy másik változata, amikor az elemek sorrendjét változtatjuk meg: ekkor a feladat lehet a változás megjelölése és/vagy az eredeti sorrend visszaállítása.

Előfordulhat, hogy egyetlen tanórán sem lesz fő téma a halmazelmélet és/vagy a logika, de példaanyaga átszövi a teljes óvodai matematikai nevelést, az általános iskolai tananyagot, és nem csupán a matematikáit. Ezért igen nehéz meghatározni, hogy a matematikaóráknak hány százalékát fordítjuk ennek a témakörnek az elsajátítására, alkalmazására az egyes évfolyamokon.

A matematikai logika 1. évfolyamtól kezdve, sőt már az óvodában is megjelenik: állításokat fogalmazunk meg, állításokról eldöntjük, hogy igazak-e vagy hamisak, nyitott mondatokat teszünk igazzá vagy hamissá. Az egyszerű állításokból a *nem*, az *és*, valamint a *vagy* kötőszavak felhasználásával további állításokat képzünk. Ezeknek az összetett állításoknak a helyes értelmezése segíti nemcsak a matematikai fogalmak, hanem bármely tantárgyi szöveg pontos értelmezését is.

A halmazok és a matematikai logika szoros kapcsolatuk miatt elválaszthatatlanok egymástól. Mind a két témakör megjelenik már az óvodáskorban, az iskolai tananyagban pedig a halmaz fogalmát valamennyi témakörben felhasználjuk. Például a természetes szám fogalmának értelmezésekor (1.1.2. fejezet), az alapműveletek bevezetésekor (1.2. fejezet), a relációk értelmezésekor (5.1. fejezet), a geometriai témakörökben a ponthalmazok vizsgálatakor (3.1.3. és 3.2.3. fejezetek). A kombinatorika, valószínűség, statisztika témakörök sem nélkülözik a halmazszemléletet (4. fejezet).

2.1.1. A logikai ismeretek tanítása, állítások vizsgálata

Az állítások vizsgálata során a fő feladatok:

- az állítások logikai értékének (igaz-hamis értékének) meghatározása;
- adott logikai értékhez, adott alaphalmazhoz kapcsolódó állítás megfogalmazása;
- az állítások átfogalmazása úgy, hogy a logikai értéke ne változzon meg;
- az állítás tagadása,
- az *és/vagy* logikai műveletek alkalmazása egyszerű állítások összekapcsolásával.

Mindezekhez használható eszközök például a logikai készlet, a dominó, különböző kártyák, termények, egyéb tárgyak, szavak, számok stb.

Állítások logikai értéke

Az állítás olyan kijelentő mondat, melyről egyértelműen eldönthető, hogy logikai értéke igaz vagy hamis. A kérdő, a felszólító és az óhajtó mondatok nem állítások, mivel nincs értelme azt vizsgálni, hogy igaz-e vagy sem egy ilyen mondat, például: „De szeretnék gazdag lenni!” Megfogalmazhatunk olyan kijelentő mondatot is, amely szintén nem állítás, mivel nem tudjuk vagy nem akarjuk eldönteni, hogy igaz-e vagy sem, például: „Az 5 szebb, mint a 3.”

Az általános iskolai gyakorlatban az igaz állítást *i* vagy *I* betű, a hamis állítást *h* vagy *H* betű jelöli. Például: „A 2 páros szám.” kijelentés logikai értéke igaz (*i*), „A 3 kisebb, mint a 2.” kijelentés logikai értéke hamis (*h*).

1. példa

Mondj 3 igaz és 3 hamis állítást a 12 számról!

Megoldás

Igaz állítások például: „A 12 páros szám.” „A 12 kisebb, mint a 20.” „A 12 kétjegyű szám.”

Hamis állítások például: „A 12 egyjegyű szám.” „ $10 > 12$.” „ $5 + 5 + 5 = 12$.”

Állítások tagadása

A köznyelvben egy állítást a „Nem igaz, hogy ...” mondatkezdéssel tagadunk. A tagadásra vannak emellett más lehetőségek is: a *nem* tagadószót iktatjuk be az állítmány elé, vagy megfelelő körülírást, esetleg fosztóképzőt használunk. Például:

Állítás	Állítás tagadása
A tanteremben a tábla zöld.	Nem igaz, hogy a tanteremben a tábla zöld. A tanteremben a tábla nem zöld. Tagadom, hogy a tanteremben a tábla zöld.
A 6 páratlan szám.	Nem igaz, hogy a 6 páratlan szám. A 6 nem páratlan szám. A 6 páros szám. Nem igaz, hogy a 6 nem páros szám.
3 kisebb, mint 2. ($3 < 2$)	Nem igaz, hogy 3 kisebb, mint 2. 3 nem kisebb, mint 2. ($3 < 2$) 3 nagyobb vagy egyenlő, mint 2. ($3 \geq 2$)

Megjegyzések:

- Igaz állítás tagadása hamis, hamis állítás tagadása igaz állítás. A fogalom megértéséhez azonban tudatosítani kell, hogy például „A 12 kétjegyű szám.” igaz állítás tagadása „A 12 nem kétjegyű szám.” (hamis állítás), de nem tagadásai (noha logikai értékük szintén hamis) „A 12 egyjegyű szám.”, „A 12 háromjegyű szám.” stb. állítások.
- A „Nem igaz, hogy a 6 nem páros szám.” állítás a kettős tagadásra mutat rá. Páros számú tagadás nem változtatja meg az állítás logikai értékét, míg a páratlan számú igen.

„Minden ...”, „Van olyan ...” típusú állítások

A „Minden ...”, „Van olyan ...” típusú állítások logikai értékét egy adott alaphalmaz elemeire vonatkoztatva határozhatjuk meg.

Egy „Minden”, „Mindegyik” kezdetű állítás akkor igaz, ha az alaphalmaz összes elemére igaz az állítás.

Egy „Van olyan ...”, „Van köztük ...” kezdetű állítás akkor igaz, ha az alaphalmaznak van legalább egy olyan eleme, amelyre igaz az állítás.

2. példa

Dönts el, igazak vagy hamisak az alábbi állítások a 11, 12, 13, 14, 15 számokra!

- Mindegyik szám kétjegyű.
- Mindegyik szám páros.
- Van köztük olyan szám, amelyik 10-nél kisebb.
- Van köztük olyan szám, amelyben a számjegyek összege páratlan.

Megjegyzés:

A „Minden” és a „Van olyan” szavak helyes használatának kialakításához az állítások megállapított logikai értékét mindegyik esetben indokoljuk. Például: Az *a*) állítás azért igaz, mert az „A ... szám kétjegyű.” nyitott mondatba behelyettesítve a felsorolt számok mindegyikét, igaz állításokat kapunk.

A *c*) állítás azért hamis, mert nincs egyetlen olyan szám sem a felsoroltak között, amely igazzá tenné „A ... szám 10-nél kisebb.” nyitott mondatot (lásd 2.2.1. fejezet).

A „Minden” és a „Van olyan” kifejezések szoros logikai kapcsolatára mutatnak rá a következő példák.

a) Hazugmondó azt mondja, hogy „A ládában *minden* alma piros.” Igazmondó hogy mondaná ugyanezt?

Mondhatja, hogy „*Nem igaz*, hogy a ládában *minden* alma piros.”, „A ládában *nem minden* alma piros.”, vagy „*Van olyan* alma a ládában, amelyik *nem* piros.”

b) „Katinak *van olyan* könyve, amelyik be van kötve.” Petre ez az állítás nem igaz. Mit mondhatunk Peti könyveiről?

„Petinek *nincs olyan* könyve, amelyik be van kötve.”, „Petinek *egyik* könyve *sincs* bekötve.”, vagy „Petinek *minden* könyvére igaz, hogy *nincs* bekötve.”

Állítás	Tagadása
Minden ...	Nem minden ... Van olyan ..., amelyik nem
Van olyan ...	Nincs olyan ... (Egyik ... sem/sincs) Minden ... nem/nincs

Az állítások átfogalmazása azt jelenti, hogy olyan, az eredetivel azonos logikai értékű állítást alkotunk, melynek a tartalma is változatlan.

A logikai kötőszavak helyes használatával a matematika, bármely szaknyelv és a köznyelv kapcsolatát is erősítjük, hozzájárulunk ahhoz, hogy gondolatainkat minél pontosabban fejezzük ki anyanyelvünkön.

3. példa

Mondjunk állításokat az elemekről, majd döntsük el, hogy igazak-e vagy hamisak!

	10 11 2 4 6 8
--	---

Megoldás

Néhány lehetséges állítás:

		10 11 2 4 6 8
a)	Mindegyik alakzat piros. (I)	Mindegyik szám páros. (H)
b)	Csak piros alakzatokat választottunk. (I)	Csak páros számok vannak a táblán. (H)
c)	Van az alakzatok között piros. (I)	Van közöttük páros szám. (I)
d)	Van olyan alakzat, amelyik nem kör alakú. (I)	Van olyan, amelyik nem a 4 többszöröse. (I)
e)	Nem mindegyik alakzat kör. (I)	Nem mindegyik szám a 4 többszöröse. (I)
f)	Van olyan alakzat, amelyik nem piros. (H)	Van olyan szám, amelyik nem páros. (I)
g)	Nem csak piros alakzatokat választottunk. (H)	Nem csak páros számok vannak a táblán. (I)
h)	Nincs az alakzatok között piros. (H)	Nincs közöttük páros szám. (H)
i)	Egyik sem piros. (H)	Egyik sem páros. (H)

Megjegyzések:

- A táblázat két oszlopában szereplő állítások logikai szerkezete páronként azonos, tartalmuk azonban eltérő.
- Az a)–b), a d)–e), az f)–g) és a h)–i) állítások egymás átfogalmazásai, ugyanazt jelentik.

Összetett állítások az és, illetve a vagy kötőszó felhasználásával

Két állítást valamilyen kötőszóval összekapcsolva újabb állításhoz jutunk, azaz logikai műveletet végzünk.

Az és kötőszóval összekapcsolt állítás pontosan akkor igaz, ha mindkét tagmondata igaz. Az együttes információtartalom kifejezésére a köznyelv-

ben más kötőszavakat is használhatunk, például: Péter és Pál megérkezett. Péter, továbbá Pál megérkezett. Péter is, Pál is megérkezett.

Péter megérkezett, és Pál nem. *Noha* Péter megérkezett, Pál nem. Péter megérkezett, *de* Pál nem.

A *vagy* kötőszóval összekapcsolt állítást a köznyelvben többféleképpen értelmezhetjük.

a) A *megengedő* értelemben használt *vagy* kizárólag akkor igaz, ha legalább az egyik állítás igaz. A „Péter *vagy* Pál megérkezett.” mondat azt jelenti, hogy vagy Péter, vagy Pál, vagy mindketten megérkeztek, azaz megengedi a két állítás együttes igazságát.

b) A *kizáró* értelemben használt *vagy* a két állítás együttes igazságát kizárja. A „Péter ma délután *vagy* moziba megy, *vagy* olvas.” állítással kizárjuk azt, hogy a két tevékenységet egyszerre végezze Péter. A köznyelvben, ha hangsúlyozni akarjuk a kizáró jelleget, a *vagy* kötőszót gyakran megismételjük.

c) A *vagy* kötőszót alkalmazzuk azokban az esetekben is, amelyeket a következő mondat példáz: „A pénzfeldobás eredménye fej *vagy* írás.” Nem dobhatok egyszerre fejet és írást, de az sem fordulhat elő a pénzfeldobáskor, hogy sem fejet, sem írást nem dobok.

Az összekapcsolt állítások értelmezéséhez mindig figyelembe kell venni a tanulók anyanyelvi ismereteit.

4. példa

Igazak vagy hamisak az alábbi állítások a logikai készlet nagy kék lyukas háromszögére?

Ez az elem piros és lyukas.	Ez az elem kék vagy kör.
Ez az elem nagy és kék.	Ez az elem kék vagy háromszög.

Összetett állítások *Ha ... akkor* kötőszavakkal

Ha ... akkor szerkezetű mondatokat a mindennapi életben akkor fogalmazunk meg, ha a két tagmondat tartalma között valamilyen ok-okozati viszonyt feltételezünk. Az ilyen szerkezetű állításokat szokás feltételes állításoknak is nevezni.

Az „Esik az eső.” és a „Felveszem a gumicsizmámat.” állításokat kétféleképpen is összekapcsolhatjuk:

a) *Ha* esik az eső, *akkor* felveszem a gumicsizmámat.

b) *Ha* felveszem a gumicsizmámat, *akkor* esik az eső.

Érezzük, hogy a két mondat jelentése nem ugyanaz, tehát a két tagmondat felcserélésével az állítás tartalma megváltozik.

A feltételes állításokat más kötőszavakkal is megfogalmazhatjuk. Például: *Ha* Péter eljön, *akkor* eljön Pál is. *Feltéve*, *hogy* Péter eljön, eljön Pál is. *Amennyiben* Péter eljön, eljön Pál is.

5. példa

Dönts el, hogy igazak vagy hamisak az alábbi állítások!

- a) Ha egy szám osztható 6-tal, akkor osztható 2-vel is.
- b) Ha egy szám osztható 2-vel, akkor osztható 6-tal is.
- c) Ha egy szám páros, akkor osztható 2-vel.
- d) Ha egy szám osztható 2-vel, akkor páros.

Megjegyzések:

- A fenti mondatokban szereplő *egy* határozatlan névelő általánosítást jelent, ezért az állításokat úgy értjük, hogy *minden* számra igazak.
- A c) és d) állításokat helyettesíthetjük egyetlen állítással: „Egy szám *akkor és csak akkor* osztható 2-vel, ha páros.” vagy „Egy szám *kizárólag akkor osztható* 2-vel, ha páros.” A matematikai szaknyelv használja a *pontosan akkor* kifejezést is, de ez zavaró lehet ebben az életkorban, mivel a pontosan szó általában a hibátlanságra utal.

Következtetések

A matematikai logikában a következtetés azt jelenti, hogy két vagy több állításból (feltételek) kiindulva megfogalmazunk egy újabb állítást (következmény). Alsó tagozaton nem feladatunk a következmény helyességének elemzése a matematikai logika eszközeivel, de egyszerű következtetéseket végzünk minden olyan esetben, amikor a tanulók válaszaikat indokolják, érvelnek valamely elképzelésük helyessége mellett, vagy igyekeznek társaik elgondolásait cáfolni. Általában ilyen jellegű vitákra a 3–4. évfolyamon kerül sor.

6. példa

Anikó, Bori és Csilla egy-egy sportot választanak a futás, az úszás és a kerékpározás közül. Találd ki, melyik lány milyen sportot űz, ha tudjuk, hogy Anikó nem úszó.

Bori futó vagy úszó.

Csilla se nem kerékpározó, se nem futó.

2.1.2. A halmaz fogalma, jelölése, szemléltetése

A *halmaz*, az *elem*, *eleme* fogalmakkal már az óvodában is ismerkednek a gyerekek anélkül, hogy magukat a kifejezéseket használnák. A *halmazt* mint matematikai fogalmat a „halmaz” szó mellett például az „összesség”, „csoport”, „kupac” szavakkal fejezzük ki. Az *elem* szinonimájaként a „tárgy”, „egyed”, „dolog”, az *eleme* helyett pedig a („csoportba”, „kupacba”) „beletartozik”, „közötte van” szavakat használjuk. A nyelvi megfogalmazás mellett szem előtt kell tartanunk, hogy a hangsúly a fogalomalakításon van és nem az elnevezésen. Például a 10-nél kisebb természetes számok akkor is a $\{0, 1, \dots, 9\}$ számok halmazát jelenti, ha a megfogalmazásban nem jelenik meg a *halmaz* szó. A ponthalmazok meghatározásakor is sokszor alakzatokról, formákról beszélünk *halmazok* helyett.

A matematikai szövegekben a halmazokat nagybetűvel, elemeinek felsorolását kapcsos zárójellel szokás jelölni. Alsó tagozaton azonban ezeket a jelölésmódokat még nem használjuk. A halmazokat elemeik közös tulajdonsága alapján nevezzük el, az elemeket pedig egyszerűen felsoroljuk egymás után. Például egyjegyű számok: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

A halmazok szemléltetésére gyakran használjuk alsó tagozaton is a Venn-diagrammot annak megnevezése nélkül. Ezek a diagramok különböző síkidomok lehetnek, amelyekbe a halmazok elemeit rajzoljuk, írjuk. Rendszerint megrajzoljuk az alaphalmazt, azaz a szóba jöhető dolgok halmazát is. Az alaphalmazon belül egy síkidom két halmazt szemléltet.

1. példa

Írd be az egyjegyű számokat a halmazábra megfelelő részébe! (2.1. ábra)

Az alaphalmaz most az egyjegyű számok halmaza, ezt az ábrán a külső téglalap szemlélteti. A feladat szerint ezek közül a számok közül kell kiválasztani a 3 többszöröseit, amelyek bekerülnek a belső síkidomba, a többi számot (melyek nem többszörösei a 3-nak) a belső síkidomon kívülre írjuk a téglalapba.



2.1. ábra

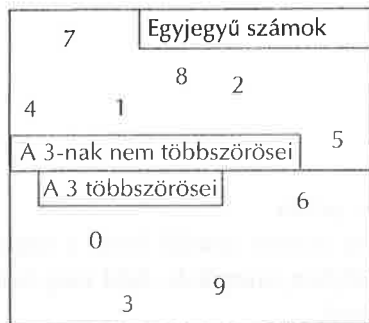
Fontos tudatosítanunk a tanulóknak, hogy az egyjegyű számok mindegyikét el kell helyezni az ábrán, és mindegyik szám csak egy helyre kerülhet.

A halmazokat címkékkel látjuk el, igyekezve rövid, de egyértelmű elnevezéseket találni. A címke mindig abba a síkidomba kerül, amelyikre vonatkozik.

A kiegészítő halmaz fogalmának alakítását segítheti, ha ezt a halmazt is külön címkén megnevezzük (2.2. ábra).

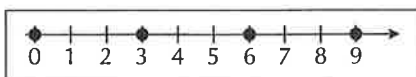
Ugyanezeket a halmazokat megjeleníthetjük táblázatban is:

Egyjegyű számok	
3 többszörösei	3-nak nem többszörösei
0 3 6 9	1 2 4 5 7 8



2.2. ábra

Mivel példánkban számhalmazokról van szó, a halmazokat számegegyesen is tudjuk szemléltetni például úgy, hogy fekete ponttal megjelöljük a 3 többszöröseit (2.3. ábra):



2.3. ábra

(Ebben az esetben a halmazok elnevezését nem tudjuk feltüntetni.)

A fogalomalkítás szempontjából, a gondolkodás rugalmasságának fejlesztése végett fontos, hogy használjunk többféle jelölést, szemléltetést.

2.1.3. Válogatások egy szempont szerint

A tárgyak, személyek, „dolgok” stb. érzékelhető tulajdonságainak megismerése, felismerése, utánzása, előállítása után ezen tulajdonságok szerint sokféle összehasonlítást, szétválogatást, rendszerezést végezethetünk. Ez képezi a fogalomalkotás kiindulópontját.

Az egy szempont szerinti válogatás azt jelenti, hogy egy adott (alap)halmaz elemeiből egy tulajdonság alapján elkülönítünk egy halmazt. Ebbe a halmazba kerülnek az adott tulajdonsággal rendelkező elemek, a többi elem – azaz amelyek nem rendelkeznek az adott tulajdonsággal – alkotja az első halmaz kiegészítő halmazát (komplementerét).

A válogatás után hasznos megbeszélni, hogy miket válogattunk ki, és miket nem. Például kiválasztottuk:

- az osztály tanulói közül a fiúkat, de a lányokat nem;
- a logikai készlet elemeiből a lyukasakat, de a telítetteket nem;
- adott számok közül a párosakat, de a páratlanokat nem;
- az ábécé betűiből a mássalhangzókat, de a magánhangzókat nem;

- adott alakzatok közül azokat, amelyeket csak egyenes vonal határol, de azokat nem, amelyeket nem csak egyenes vonal határol.

Miközben a tanulók előállítanak egy halmazt, és annak kiegészítő halmazát, egy állítás tagadásáról is tapasztalatokat szereznek.

1. példa

Az osztály tanulói közül a napközisek elmentek ebédelni. A többiek az osztályban maradtak. Add meg tulajdonsággal, hogy kik maradtak az osztályban!

2. példa

A háromjegyű számok közül válogassuk ki azokat, amelyeknek legalább két számjegye azonos! Mely számokat nem választottuk ki?

Megjegyzés:

A feladatmegoldások során a *legalább*, *legfeljebb* szavak pontos értelmezésére is ki kell térni. Ezért a fenti példa utasítását célszerű átfogalmazni: „A háromjegyű számok közül válogassuk ki azokat, amelyeknek két vagy három számjegye azonos!” A „Mely számokat nem választottuk ki?” kérdés megválaszolásához „A számnak legalább két számjegye azonos.” állítás tagadását kell helyesen megfogalmazni: „Nem igaz, hogy a számnak legalább két számjegye azonos.”, vagy átfogalmazva: „A számnak minden számjegye különböző.”

Az egy szempontú válogatások alkalmasak arra is, hogy a halmaz fogalmát kiterjesszük olyan halmazra is, amelynek egyetlen eleme sincs (üres halmaz). Például: „Válogassuk ki a logikai készlet elemei közül a hatszögeket!”

A válogatáshoz kapcsolódó tevékenység lehet tárgyi manipuláció, de végezhetjük papíron rajzolással, ragasztással, színezéssel. Az összetartozó elemeket összeköthetjük vonalakkal vagy bekarikázhathatjuk. A tevékenység megválasztását befolyásolja az adott matematikai téma, a gyermekek fejlettségi szintje. Ugyanazt a feladatot más-más tevékenységgel oldhatják meg a különböző fejlettségi szinten álló tanulók. A tiszta fogalomalkotás érdekében fontosnak tartjuk, hogy az egy szempontú válogatáshoz se csupán egyfajta tevékenység kapcsolódjon.

3. példa

Az asztalon piros és kék bábuk vannak. Tegyük a piros bábuk az egyik, a többi a másik dobozba. Mely bábuk kerültek a másik dobozba?

Megoldás

Válaszolhatjuk azt, hogy a nem pirosak, de azt is, hogy a kék bábuk kerültek a másik dobozba. A válasszal meghatároztuk a piros bábuk halmazának kiegészítő halmazát. Láthatjuk azt is, hogy a tagadás a nyelvi formát tekintve többféle lehet: a tagadó mondatban szerepelhet a *nem* tagadószó, de nélküle, egy másik tulajdonság megadásával is azonosíthatjuk, megfogalmazhatjuk („címkézhetjük”) a kiegészítő halmazt.

A következő két példában azt mutatjuk meg, hogy a halmazok és a logika témakörök nem választhatók el a többi matematikai témakörtől, azokat át-meg átszövik.

4. példa

Egy péksütemény 35 Ft-ba kerül. A zacskó, amelybe beletesszük az összes vásárolt péksüteményt, 10 Ft.

- a) Mennyit fizetünk 1, 2, 3, ..., 10 péksüteményért és egy zacskóért?
- b) 200 Ft-ért hány péksüteményt vehetünk?

Megoldás

- a) Kiszámoljuk, hogy különböző darabszámok esetén mennyit kell fizetnünk, táblázatba foglaljuk az összetartozó számpárokat.
- b) A fizetendő Ft-értékek közül kiválogatjuk azokat, amelyek nem nagyobbak 200 Ft-nál, azaz ezt a halmazt két részre bontjuk aszerint, hogy az elemei 200-nál nagyobbak vagy nem nagyobbak.

Péksütemény (db)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Péksütemény + a zacskó ára (Ft)	45	80	115	150	185	220	255	290	325	360

Vehetünk tehát vagy 1, vagy 2, vagy 3, vagy 4, vagy 5 db péksüteményt. Azt is mondhatjuk, hogy legfeljebb 5 péksüteményt vehetünk, azaz 5-nél több péksütemény nem telik ki a pénzünkből.

5. példa

2, 3, 5, 9 számkártyáink vannak.

a) Hány 300-nál kisebb szám képezhető ebből a négy számkártyából?

b) Hány ötten osztható szám képezhető ebből a négy számkártyából?

Megjegyzés:

Ezt a feladatot abban az esetben sorolhatjuk az egy szempontú válogatások közé, ha megköveteljük az összes elem felsorolását, és ezekből válogatjuk ki a feltételnek eleget tevőket, azaz először megalkotjuk a 300-nál kisebb számok halmazát, azaz az alaphalmazt. Természetesen a feladatot más gondolatmenettel is megoldhatjuk.

2.1.4. Válogatások több szempont szerint

Több szempontú válogatás esetében (hasonlóan az egy szempontú válogatáshoz), először az egyik szempont szerint döntjük el, hogy az elem rendelkezik-e az adott tulajdonsággal, vagy nem, azután a másik szerint, és így haladunk tovább az összes szempont alapján. Lényegesen nehezebbek, de jól algoritmizálhatók az ilyen típusú feladatok.

Válogathatunk számokat például 2-vel, 3-mal, 5-tel oszthatóságuk szerint. Ekkor a feladat a számelmélet témakörébe is tartozik. Válogathatunk síkidomokat különböző geometriai tulajdonságok alapján: például négyszög, van két egyenlő szöge, van derékszöge. Ekkor a feladat a megfelelő geometriai fogalmak kialakítását is szolgálja.

A válogatások alaphalmazának és szempontjainak megfelelő választásával a tantárgyak közötti koncentrációra is lehetőség nyílik.

Válogatások két szempont szerint

A két szempontú válogatások az eredményként kapott két halmaz kölcsönös helyzetétől függően különböző nehézségű feladatot jelentenek.

a) Első lépésként úgy adjuk meg az alaphalmaz elemeit vagy a válogatás két szempontját, hogy ne legyen olyan elem, amelyik mind a két válogatási szempontnak megfelel. Az így kialakított két halmaznak nincs közös eleme (különállók vagy diszjunktak).

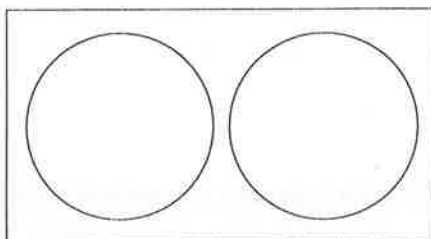
1. példa

Válogasd ki a felsorolt élőlények közül a növényeket és az állatokat! sas, tulipán, kacsa, ló, hagyma, paradicsom, ember, majom, búza, pók

állatok:
 növények:

Megjegyzés:

Az ilyen válogatásokhoz a következő típusú halmazábrát használhatjuk (2.4. ábra):

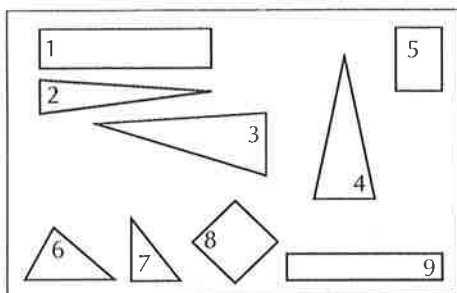


2.4. ábra

Ha a válogatás eredményeképpen az alaphalmaz minden eleme besorolható az egyik vagy a másik halmazba, a feladat egy szempontú válogatásként is felfogható.

2. példa

Válogasd külön a síkidomok közül a háromszögeket és a téglalapokat! (2.5. ábra) Írd a számokat a megfelelő helyre! (2.6. ábra)

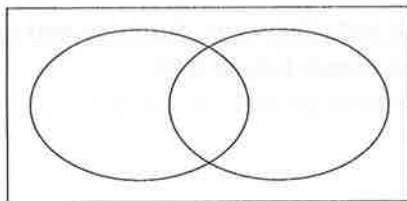


2.5. ábra



2.6. ábra

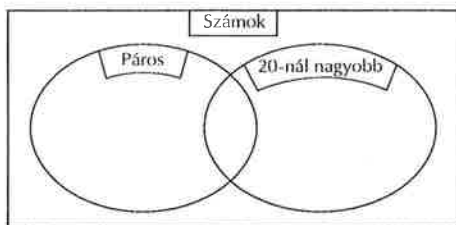
b) Következő lépésként legyen az alaphalmaz elemei között olyan vagy legyenek olyanok (de nem mindegyik), amelyek rendelkeznek mind a két válogatási szempontoknak megfelelő tulajdonsággal. Mivel a halmazábrán minden elem csak egyszer jelenhet meg, ezeknek az elemeknek az elhelyezéséhez más típusú halmazábrát kell használnunk. (2.7. ábra)



2.7. ábra

3. példa

Képezz kétjegyű számokat az 1, 3, 6 számjegyekből az összes lehetséges módon! Írd a számokat a halmazábrára megfelelő részeibe! (2.8. ábra)

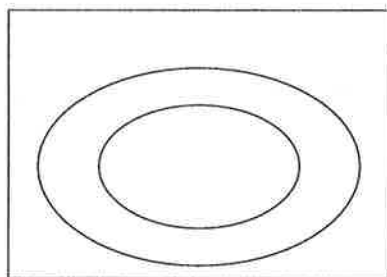


2.8. ábra

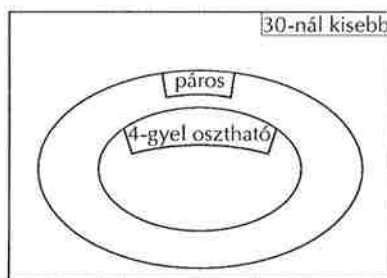
c) A két halmazba válogatások közül a legtöbb nehézséget az jelenti, amikor az egyik halmaz minden eleme beletartozik a másik halmazba is. Ekkor azt mondjuk, hogy az egyik halmaz részhalmaza a másiknak. A részhalmazkapcsolatot a 2.9. ábrával szemléltetjük.

4. példa

A 30-nál kisebb számok közül előbb válogasd ki a párosakat, majd a 4-gyel oszthatókat! Töltsd ki a halmazábrát! (2.10. ábra)



2.9. ábra



2.10. ábra

d) A két szempontú válogatások speciális eseteként eljuthatunk két halmaz egyenlőségének megtapasztalásához is.

5. példa

A 402, 204, 1203, 5001, 60, 600 számok közül válassz!

A tízesek helyén 0 áll:

Számjegyeinek összege 6:

Megjegyzés:

A példában szereplő halmazok egyenlők, mert ugyanazok az elemeik. Cél-szerű azonban rámutatni arra, hogy más alaphalmaz esetén ugyanezek a válogatási szempontok nem feltétlenül eredményeznek egyenlő halmazokat.

A halmazműveletek értelmezése

A halmazműveletekről változatos tartalmú, de matematikailag azonos típusú példákon keresztül szeretnénk tapasztalatokat. Ehhez alsó tagozaton elsődlegesen olyan két szempontú válogatásokat vizsgálunk, melyek eredményeképpen a létrejövő két halmaznak van közös eleme (de nem mind közös).

A következőkben „A 30-nál kisebb számok közül válogasd ki a 2-vel osztható, illetve a 3-mal osztható számokat!” feladatból kiindulva vizsgáljuk a halmazműveletek értelmezésének lehetőségét. A halmazműveletek (metszet, unió, különbség, szimmetrikus különbség) megnevezésére alsó tagozaton nem kerül sor.

A megoldást szemléltethetjük számegyenesen, táblázattal, Venn-diagrammal:

- a) Jelöljük a számegyenesen a 2-vel osztható számokat, azaz a 2 többszöröseit ponttal, a 3-mal osztható számokat, azaz a 3 többszöröseit kereszttel! A számegyenesről leolvasható, hogy azokat a számokat nem jelöltük meg, amelyek egyik tulajdonsággal sem rendelkeznek. Azok a számok, amelyeket ponttal is és kereszttel is megjelöltük, mindkét tulajdonsággal rendelkeznek. (2.11. ábra)

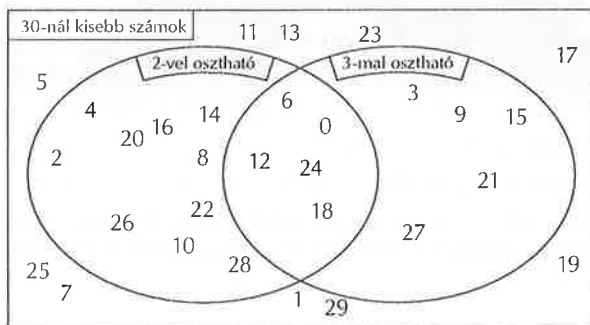


2.11. ábra

- b) Írjuk be a táblázat megfelelő celláiba a számokat 0-tól 29-ig!

	2-vel osztható számok	2-vel nem osztható számok
3-mal osztható számok	0, 6, 12, 18, 24	3; 9; 15; 21; 27
3-mal nem osztható számok	2, 4, 8, 10, 14, 16, 20, 22; 26; 28	1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 25; 29

- c) A feladat Venn-diagrammal szemléltetve (2.12. ábra):

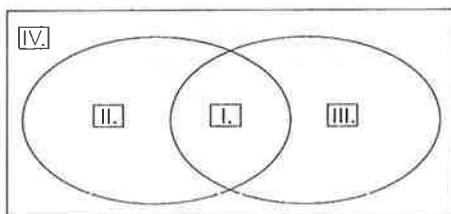


2.12. ábra

Megjegyzések:

- Már a kezdeti időszakban, a konkrét tulajdonságok felsorolásakor is szoktassuk a gyermekeket a halmazelméletben és a matematikai logikában megszokott kifejezések pontos használatára (nem, és, vagy, mindegyik, van olyan, egyik sem, a halmazok része, közös része, egyesítése stb.).
- A két szempontú válogatások során egyidejűleg négy tulajdonságot kell figyelembe vennünk. Az egyik és a másik szempont meglétét vagy meg nem létét, azaz (2.18. ábra):

- I. mindkét szempontnak megfelelő elemek halmaza (a halmazok közös része)
- II. csak az egyik szempontnak megfelelő elemek halmaza (a halmazok különbsége)
- III. csak a másik szempontnak megfelelő elemek halmaza (a halmazok különbsége)
- IV. egyik szempontnak sem megfelelő elemek halmaza (a halmazok egyesítésének kiegészítő halmaza)

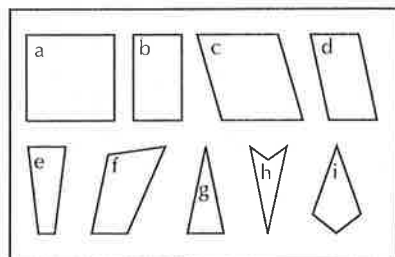


2.18. ábra

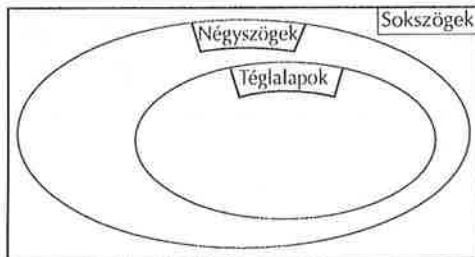
A két megadott szempont természetesen lehet olyan is, hogy a létrejövő két halmaz különálló lesz, vagy pedig részhalmazkapcsolatban van. A halmazműveletekről szerezhető tapasztalatok körét ilyen típusú válogatásokkal bővítjük tovább.

6. példa

Válogasd ki a felsorolt síkidomok közül a négyszögeket, illetve a téglalapokat! (2.19. ábra) Írd a betűket az ábra megfelelő részébe! (2.20. ábra) Fogalmazd meg saját szavaiddal, hogy milyen tulajdonságú síkidomok kerültek egy-egy részbe!



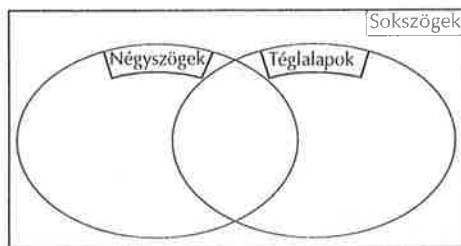
2.19. ábra



2.20. ábra

Megjegyzések:

- A példa alkalmas annak felismertetésére, hogy a téglalapok halmaza részhalmaza a négyszögek halmazának. Más szavakkal: minden téglalap négyszög, de nem minden négyszög téglalap.
- Ha a 2.20. ábra Venn-diagramja helyett a 2.21. ábrán szereplőt adjuk meg, akkor az ábra kitöltése lehetőséget ad az üres halmaz megtapasztaltatására, hiszen nincs olyan síkidom, amely téglalap, de nem négyszög.



2.21. ábra

Kettőnél több szempontú válogatások

A több szempontú válogatások közül az a legegyszerűbb eset, amikor az alaphalmaz mindegyik eleme pontosan egy válogatási szempontnak felel meg (osztályozás).

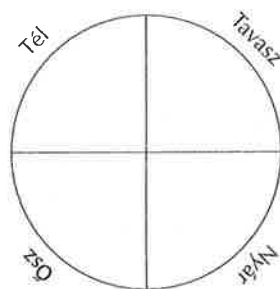
7. példa

Írd be a kördiagramba a hónapok nevét!

Írd be a tárgyak nevének aláhúzott betűit aszerint, hogy melyik évszakra a legjellemzőbbek!

karácsonyfa, télikabát, nyuszi tojással, kikerics, strandruha, napernyő, napozóagy, cseresznye, le-
hulló őszi falevelek, a te születésnapod

(2.22. ábra)

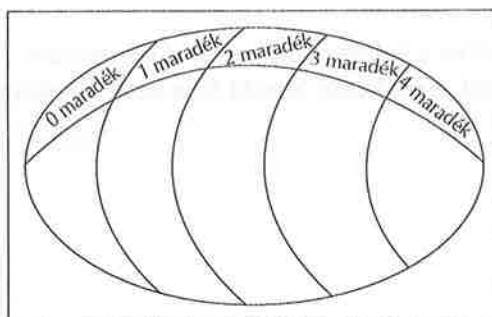


2.22. ábra

8. példa

Helyezd el a számokat 20-tól 35-ig aszerint, hogy 5-tel osztva mennyit adnak maradékul (0, 1, 2, 3, 4)! (2.23. ábra)

A több szempontú válogatások értelmezése lényegesen nehezebb abban az esetben, ha a válogatás szempontjai olyanok, melyek eredményeképpen egy-

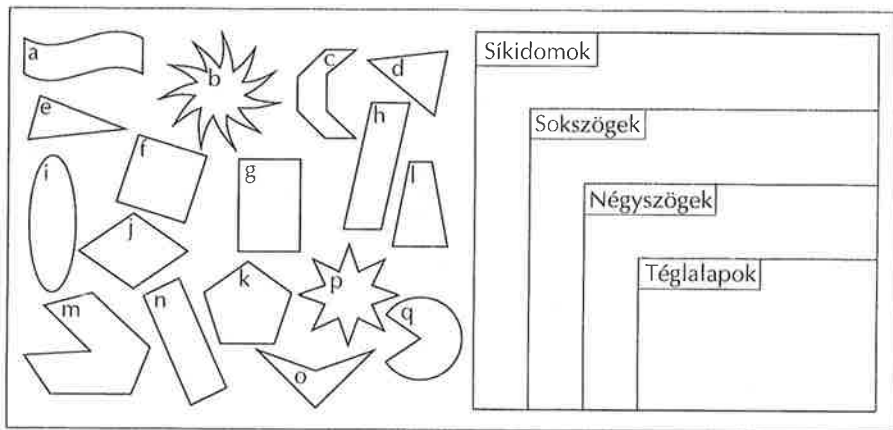


2.23. ábra

másba skatulyázott halmazokat kapunk. Az ilyen típusú válogatás a fogalmi rendszerek kialakulását, a fogalmak hierarchiájának megértését is szolgálja.

9. példa

Helyezd el a megadott síkidomok betűjelét a halmazábrába! (2.24. ábra)



2.24. ábra

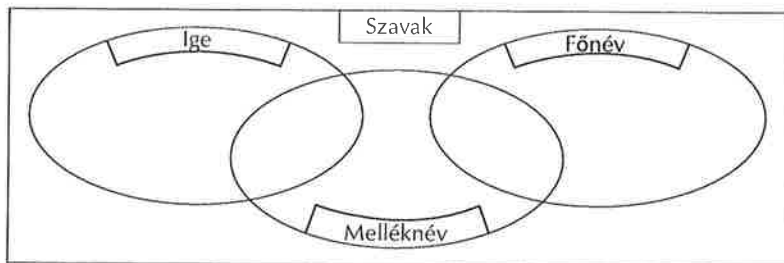
Megjegyzés:

A feladattal a síkidomok rendszerezését gyakoroltatjuk, példák és ellenpéldák segítségével értelmezzük a síkidom, sokszög, négyszög fogalmakat, és vizsgáljuk a fogalmak közötti kapcsolatokat. Ez a feladat nehéznek számít az alsó tagozaton.

Kiegészítő anyagként végezhetünk három szempontú válogatásokat, de a részletes tárgyalás már a felső tagozat feladata.

10. példa

Írd be a halmazábrába az alábbi szavakat: fut, ég, bolond, és, tűz, asztal, be-szél, erős, kettő! Sorold fel a kétféle szófajú szavakat! (2.25. ábra)



2.25. ábra

Megjegyzés:

Jelentősen leegyszerűsítette a feladatot az, hogy az alaphalmazban nem szerepelnek olyan szavak, amelyek egyszerre igék és főnevek.

2.1.5. A válogatásokhoz kapcsolódó feladatok típusai

Válogatás a tanuló saját szempontja szerint

A saját szempontú válogatásoknál az első lépésként a tanulók eldöntik, hogy mi(k) legyen(ek) a válogatás szempontja(i). A második lépés – általában ez bizonyul könnyebbnek – az elemek válogatása, azaz halmazba (halmazokba) rendezése. A megoldások megbeszélésekor megtapasztaltathatjuk, hogy ugyanannak az alaphalmaznak az elemei többféleképpen is rendezhetők. Szinte végtelen a válogatásra választható tárgyak és a válogatás szempontjainak száma. Válogathatunk terményeket fajtájuk, méretük, színük, alakjuk szerint, de szubjektív szempontok is szóba jöhetnek (tetszik, szeretem stb.). Válogathatunk kártyákat a rajtuk szereplő ábrák szerint, számokat, szavakat (szám- és szókártyákat) valamely tulajdonság szerint. Dominókat csoportosíthatunk a pöttyök száma, a pöttyök számának összege, különbsége, oszthatósága vagy a pöttyökből képzett kétjegyű számok valamilyen tulajdonsága szerint. Halmazokba rendezhetjük a logikai készlet elemeit színük, alakjuk, méretük alapján.

Válogatás a tanító által adott szempont szerint

A válogatásnak ezt a formáját irányítottnak nevezzük. A tanító megadja az(oka)t a szempont(oka)t, amely(ek) alapján a tanulók az alaphalmaz elemeit rendezik. Megfelelően megadott válogatási szempontokkal alakíthatjuk a halmaz, a részhalmaz, a halmazműveletek fogalmait, ugyanakkor segíthetjük egyéb célzott fogalom kialakítását, vagy visszajelzést kaphatunk arról, hogy a tanuló milyen mértékben sajátította el, építette be az adott fogalmat meglévő ismereteinek rendszerébe.

Megkezdett válogatás folytatása

Általában a saját szempont szerinti válogatást végezzük el a legkönnyebben. Ennél kissé nehezebb feladatnak tűnik az adott szempont szerinti válogatás, és még nehezebb a megkezdett válogatás folytatása, mert ebben az esetben először meg kell találni a válogatás szempontját (vagy szempontjait), azt a tulajdonságot, amely szerint elkezdődött a válogatás, majd meg kell keresni a megfelelő új elemeket a válogatás folytatásához. A megkezdett válogatás-

hoz kötődő feladat lehet a további elemek szétválogatása (rakosgatással, rajzolással, szóban vagy írásban), a közös tulajdonság verbális meghatározása, azaz címkézése vagy mindkettő. Ez utóbbi esetben el kell döntenünk, hogy melyiket kérjük előbb. A gondolkodás rugalmasságának fejlesztése szempontjából hatékonynak tekintjük azokat a feladatokat, amelyeknek egy-egy tanuló vagy tanulócsoport több megoldását is megadhatja. Amennyiben egy fogalom megértésére, kialakítására, elmélyítésére vagy ellenőrzésére fókuszálunk, célszerűbb olyan válogatást megkezdni, amely az adott fogalom szerinti csoportosítást követeli meg.

1. példa

A 0, 3, 7, 15, 20, 30, 40, 72, 9, 32 számok közül valamilyen szempont alapján már kiválasztottuk a 0-t és a 3-at.

Folytasd a válogatást többféleképpen!

0, 3,

0, 3,

0, 3,

Mely számokat válogattad ki?

(A válasz: például a 3 többszöröseit vagy az egyjegyűeket.)

Mely számokat nem válogattad ki?

(A válasz: például azokat a számokat, amelyek nem oszthatók 3-mal, vagy azokat, amelyek nem egyjegyűek.)

A válogatásokkal összefüggő játékokban az elemek közös tulajdonságának felismerésével s ennek alapján további elemek meghatározásával egyszerű és összetett állítások megfogalmazását is gyakoroltatjuk.

A *meghatározós játékokban* a feladat a tanító vagy az egyik tanuló adott válogatásáról a felismert közös tulajdonság meghatározása verbálisan vagy tevékenységgel.

A *barkochba* játék különböző változataiban ugyancsak szükség van arra, hogy a tanulók felismerjék, megfogalmazzák bizonyos elemek közös tulajdonságait. A *válogatós barkochbában* kirakják az alaphalmaz elemeit, majd egy-egy eldöntendő kérdésre adott válasz alapján az asztalon hagyják a válasznak megfelelőket. Végül már csak a megfejtést jelentő elem marad előttük. A *hagyományos barkochbában* már az elemek kirakása nélkül, a kérdésekre adott igen-nem válaszok alapján kell kitalálni, hogy mire gondoltunk; ennek a barkochbának ismert az *igazmondós* és a

hazudós változata is. A *néma barkochbában* az alaphalmaz elemeinek a csoportosításával kell kitalálni a gondolt elemet, a *relációs barkochbában* az alaphalmazból kiválasztott két-két elem alapján kell meghatározni a közös tulajdonságot.¹

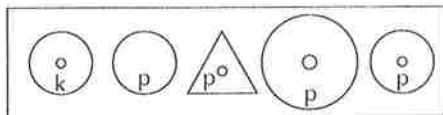
„Elrontott” válogatások javítása

Az előre megadott szempont szerinti válogatás speciális esetének tekinthető, ha az elemek között van oda nem illő. Ekkor a feladat ezen elemek megkeresése. Ezek a „kakukktojás” típusú feladványok. Első lépésben fel kell ismerni egy olyan tulajdonságot, amely egy kivételével minden elemre vonatkozik. Ezt követően meg kell keresni a „kakukktojást”. Végül meg kell fogalmazni a válogatás szempontját, és megindokolni, hogy a kiválasztott elem miért nem felel meg ennek. Utolsó lépésként azt is meghatározhatjuk, hogyan lehetne módosítani az elemet, hogy beletartozzon a halmazba.

Ha az elemeket úgy válogatjuk össze, hogy egy-egy elemnek a tulajdonsága más-más szempontból eltér a többi elemétől, akkor több megoldást kapunk.

2. példa

Melyik alakzat nem illik a többi közé?
(2.26. ábra)



2.26. ábra

Megoldás

Az elemeket csoportosíthatjuk:

- *szín szerint*: ebben az esetben balról az első elem a kakukktojás, mert ez kék, a többi pedig piros;
- *lyukasság szerint*: ebben az esetben balról a második elem a kakukktojás, mert ez tömör, a többi pedig lyukas;
- *alak szerint*: ekkor a középső elem a kakukktojás, mert ez háromszög, a többi pedig kör;
- *méret szerint*: ekkor a jobbról a második elem a kakukktojás, mert ez nagy, a többi pedig kicsi.

¹ Részletes játékleírások találhatók Makara Ágnes: Matematika és módszertana óvodapedagógusok számára – Halmazok, logika, kombinatorika, valószínűség (ELTE TÓFK, 2003) című könyvében.

2.2. Nyitott mondatok

A nyitott mondat a logikai függvény alsó tagozatos elnevezése. Olyan speciális függvényt jelent, amelynek értelmezési tartománya egy halmaz, értékkészlete pedig az igaz és a hamis logikai értékekből áll. A nyitott mondat tehát nem állítás, de ha a benne szereplő ismeretlen vagy ismeretlenek helyére konkrét dolgot: az értelmezési tartomány egy-egy elemét helyettesítjük, akkor már egy igaz vagy egy hamis állítást kapunk. A nyitott mondatot igazgá tevő elemek alkotják az ún. igazsághalmazt.

Néhány példa a nyitott mondatok sokféleségére:

- a) Ma _____ van, és ez a _____ óra.
- b) A narancssárga rúd rövidebb, mint a _____.
- c) A 18 többszöröse a _____-nak.
- d) $12 \text{ dl} \square 2 \text{ l}$
- e) $24 \diamond 8 = 3$
- f) $6 + \triangle = 15$
- g) $2 \cdot \square + 3 \cdot \triangle = 12$
- h) $12 < \bigcirc - 4 < 20$
- i) $7 \geq \triangle \geq 10$
- j) $2 \cdot \square - \square = \square$

Az alsó tagozaton előforduló nyitott mondatok többféleképpen osztályozhatók:

- Értelmezési tartományukat szavak (*a, b*), számok (*c, f, g, h, i, j*), geometriai alakzatok, relációs (*d*) vagy műveleti jelek (*e*) egyaránt alkothatják.
- A bennük előforduló változók száma szerint beszélhetünk egy- vagy többváltozós (*a, g* példa) nyitott mondatról.
- Egy nyitott mondat lehet megoldhatatlan (*i*) vagy megoldható (*a, b, c, d, e, f, g, h, j*). Ez utóbbi esetben a megoldások száma (az igazsághalmaz elemszáma) lehet egy (*a, d, e, f, g*) vagy több (*b, c, h, j*).
- A számokon értelmezett (ún. algebrai alakú) nyitott mondatok megjelenési formájukat tekintve egyenletek, egyenlőtlenségek vagy egyenlőtlenségpárok. Ha egy nyitott mondatot az értelmezési tartomány minden eleme igazgá tesz, akkor azonosságról beszélünk (*j*).

2.2.1. A nyitott mondat fogalmi kialakítása

A nyitott mondat fogalmi kialakításakor nem szabad figyelmen kívül hagyni a fenti példákból és a rendszerezésből is következő sokféleséget. A tanítás során sem szűkíthetjük le ennek a témakörnek a feldolgozását pusztán az egyenletek és egyenlőtlenségek megoldására.

Olyan fogalmat alakítsunk ki a tanulóknak, hogy egy mondatból vagy egy összefüggésből valami hiányzik, és ennek a hiánynak a pótlásával igaz vagy hamis állításhoz jutunk. A kezdő szakaszban az ismeretlen konkretizálását, a behelyettesítési tevékenységet változatosan gyakoroltathatjuk. Az 1–2. évfolyamnak szánt feladatok többségében az igazzá és a hamissá tevés párhuzamosan van jelen, a két tevékenység egymással egyenértékű.

A nyitott mondat, az ismeretlen, a behelyettesítés és az igaz/hamis fogalmak kialakításához és megszilárdításához mind a négy évfolyamon használjunk köznyelvi és matematikai példákat!

A behelyettesítés argumentumát, az alaphalmaz elemeit bizonyos esetekben előre rögzítjük. Ennek megválasztásától függően egy nyitott mondatnak lehet egy vagy több megoldása, de az is előfordulhat, hogy nincs megoldása (megoldhatatlan). Például az $x + 2 > 13$ egyenlőtlenség a 20-as számkörben megoldható, az egyjegyű számok körében viszont nem.

1. példa

Írd a 15, 26, 32, 37 számokat a megfelelő helyre. Igazzá tegyék a nyitott mondatot!

A ___ 4-gyel osztva 0 maradékot ad. A ___ 4-gyel osztva 1 maradékot ad.

A ___ 4-gyel osztva 2 maradékot ad. A ___ 4-gyel osztva 3 maradékot ad.

2. példa

Tedd igazzá!

A ___ test téglatest.

Az ___ test nem síklapú test.

Az ___ test minden lapja háromszög.

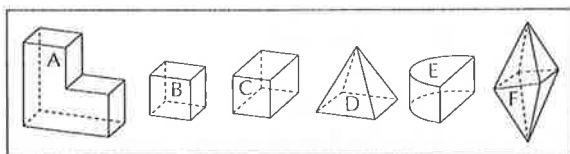
Tedd hamissá!

A ___ test kocka.

Az ___ test élei ugyanolyan hosszúak.

A ___ és a ___ testnek ugyanannyi csúcsa van.

(2.27. ábra)



2.27. ábra

Ha nem adjuk meg az alaphalmazt, akkor ennek alapvetően két oka lehet:

I. Bármilyen számra vagy dologra gondolva egyértelmű megoldása van a feladatnak:

3. példa

Írd be a hiányzó szorzót és a hiányzó összeadandót! Az összeadandó kisebb legyen, mint a szorzandó!

$$\begin{array}{r} 26 \\ \hline \square \cdot 3 + \bigcirc \\ \square \cdot 5 + \bigcirc \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ \hline \square \cdot 8 + \bigcirc \\ \square \cdot 7 + \bigcirc \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ \hline \square \cdot 7 + \bigcirc \\ \square \cdot 9 + \bigcirc \end{array}$$

II. A legbővebb ismert számhalmazt tekintjük alaphalmaznak:

4. példa

Mely számok teszik igazzá (hamissá) az egyenlőtlenséget? Írd a vonalakra!

$$8 < \bigcirc - 4$$

$$\bigcirc : \underline{\hspace{2cm}} \quad (i) \quad \bigcirc : \underline{\hspace{2cm}} \quad (h)$$

Megjegyzés:

Ha ez utóbbi feladat az 1. évfolyamon hangzik el, akkor a 20-as számkör és a kivonás elvégezhetősége miatt arra számíthatunk, hogy a tanulók csak 4 és 20 közötti természetes számokat fognak kipróbálni. Ennek ellenére biztos lesz olyan gyerek, aki például azt mondja: „A 30 is igazzá teszi, sőt a 100 is.” A 4. évfolyamon pedig el is várjuk, hogy például a 3-ra azt mondják: „Hamissá teszi.”

Néhány további észrevétel:

- A nyitott mondatokban szereplő ismeretleneket különböző módon jelölhetjük. Az 1–2. évfolyamon inkább a keretszerű jelölésmód ($\bigcirc$, $\triangle$, $\square$, $\diamond$, ...) ajánlatos. Az ismeretlenek jelölésére olyan síkidomokat vegyünk fel, amelyekbe bele lehet írni. Ez a tanulók számára megkönnyíti a behelyettesítéssel kapott állítás értelmezését, mivel az láthatóvá is válik.
- Egy nyitott mondat olvasásakor (és megoldásakor is) az ismeretlenre irányítsuk a figyelmet! Ezt úgy érhetjük el, ha a szokásos balról jobbra haladás helyett az ismeretlennel kezdjük az olvasást. Például a $15 + \square > 9 + 8$ egyenlőtlenség helyes olvasása: „Valamennyit hozzáadtam a 15-höz,

így a $9 + 8$ -nál nagyobb számot kaptam.” A behelyettesítésekkel kapott állítások olvasása viszont balról jobbra történjen!

- 3–4. évfolyamon a változók jelölésére már bátran használhatunk betűket vagy tetszőleges, nem keretszerű szimbólumokat. Ezt természetesen csak akkor tehetjük meg, ha a tanulóknak már nincs szüksége a behelyettesítés láthatóvá tételére, azt már gondolatban is el tudják végezni.
- Egy-, két-, sőt háromváltozós nyitott mondatok már 1. évfolyamtól kezdve szerepelnek a tananyagban. A szöveges feladatokba ágyazott pótlási és bontási problémák számtannyelvű lejegyzése kiváló alkalmat biztosít a nyitott mondatok felírására és megoldására.
- A nyitott mondatok konkretizálásának fontos szabálya, hogy ugyanannak a jelnek a helyére csak ugyanazt a dolgot helyettesíthetjük. Például a $\triangle + \triangle = 14$ egyenlet próbálkozással történő megoldásánál nem írhatunk az egyik háromszögbe 6-ot, a másikba pedig 8-at. Ennek megfordítása viszont nem igaz: különböző jelek helyére ugyanazt a dolgot is írhatjuk. Például a $\triangle + \square + \bigcirc = 21$ háromtagú bontási feladatnál mindhárom ismeretlen helyére írhatunk 7-et.
- A tanítók egy része alkalmazza a „ ∞ ” jelölést. Nem szerencsés, mert túl korai ennek a szimbólumnak a használata az alsó tagozaton. Ha azt akarjuk jelezni, hogy még nagyon sok, a nyitott mondatot igazzá vagy hamissá tevő szám van, akkor elégedjünk meg a három pont lejegyzésével. Ha az igazsághalmaz nagyon sok, de csak véges számú elemből áll, akkor tüntessük fel a legnagyobb elemet. Ha pedig végtelen, akkor ne zárjuk le a felsorolást a „ ∞ ” jellel. Például a $10 < 2 \cdot \bigcirc - 40 \leq 200$ egyenlőtlenségpárt a 26, 27, 28, ... , 120 egész számok, a $3 \cdot \triangle + 1 > 13$ egyenlőtlenséget az 5, 6, 7, ... egész számok teszik igazzá.

A nyitott mondatokkal való ismerkedés fejleszti a tanulók ítélőképességét és számolási készségét. A megoldások keresése, az igazsághalmaz meghatározása közelebb viszi őket a változó és a halmaz fogalmának jobb megértéséhez.

A nyitott mondatok alsó tagozatos tanításának azonban nem ez az egyetlen célja. Az egyik fontos alkalmazási lehetőséget a változók közötti függvényszerű összefüggések számtannyelvű lejegyzése szolgáltatja. Összetartozó számpárok, számhármak között felismert kapcsolatot nyitott mondatall jegyezhetünk le (lásd 5.2.2. és 5.2.3. fejezetek).

A nyitott mondatok a tanulók modellalkotási képességének fejlesztésében is komoly szerepet játszanak. A szöveges feladatok egy részét – az adatok és az ismeretlenek közötti összefüggések felírásával – nyitott mondatokkal

modellezhetjük, amelyek egyúttal megoldási tervként is szolgálnak. A továbbiakban részletes útbaigazítást adunk az algebrai alakú nyitott mondatok fajtáiról, megoldási módszereiről és modellként való alkalmazásáról.

2.2.2. Egy ismeretlen tartalmazó nyitott mondatok és megoldási módszereik

A nyitott mondatok többféleképpen osztályozhatók, például a változók száma, a megoldások száma, a műveletek száma vagy akár a feltételek száma szerint is.

Az ismeretlen (változó, „valamennyi”) nyitott mondatban elfoglalt helyétől függően beszélhetünk *explicit* és *implicit* alakú nyitott mondatokról. Az ismeretlen meghatározása az explicit alakú nyitott mondatoknál egy művelet vagy egy műveletsor kiszámítását jelenti, amihez – a műveletvégzés sorrendjének ismeretét feltételezve – csak számolni kell tudni. Például a $7 \cdot 9 - 45 = \square$ nyitott mondat ismeretlenjét (vagy egyszerűbben fogalmazva: a $7 \cdot 9 - 45$ számfeladat eredményét) két lépésben, két művelettel számíthatjuk ki.

Az implicit alakú nyitott mondatokban az ismeretlen nincs kifejezve, azt „burkoltan” tartalmazzák. Például: $\square + 120 = 410$ vagy $3 \cdot x - 120 = 400$.

A továbbiakban – fontosságukra és nehézségükre tekintettel – az implicit alakú nyitott mondatok alsó tagozaton tárgyalható megoldási módszereit tekintjük át. Ezek a nyitott mondatok algebrai alakjukat tekintve *egyenletek*, *egyenlőtlenségek* vagy *egyenlőtlenségpárok*.

Megjegyzések:

- Sokan vitatják, hogy a $\square =$ „számfeladat” alakú egyenlőségeket egyáltalán tekinthetjük-e nyitott mondatoknak (logikai függvényeknek). Kétségtelen tény, hogy a $\square$ helyére különböző számokat helyettesítve igaz vagy hamis állítást kapunk, vagyis speciálisan ebben az esetben is nyitott mondatról beszélhetünk. Ugyanakkor a műveletsor kiszámításával azonnal megtudhatjuk, hogy mely szám teszi igazzá az egyenlőséget. A megoldást, a $\square$ helyes értékét tehát nem keressük, hanem egyszerűen kiszámítjuk.
- Ezzel összefüggésben az is felmerül, hogy érdemes-e egy számfeladat eredményére ismeretlen bevezetni. Ha így teszünk is, akkor sem gondolhatjuk, hogy ezekkel a „kiszámolós” feladatokkal ki is merítettük a nyitott mondatok problematikáját. Ez olyan képtelenség, mintha például a sokszögek tulajdonságainak feltárásakor mindig csak téglalapokra korlátozódnánk. A tanulók látják kárát, ha nem foglalkozunk

kellő mélységben és mennyiségben a „valódi”, az implicit alakú nyitott mondatokkal.

Egyenletek megoldása

Az ilyen alakú nyitott mondatok megoldása

I. próbálgatással,

II. művelettel,

III. lebontogatással,

IV. rajz segítségével,

V. „túl kicsi – túl nagy” módszerrel vagy

VI. következtetéssel történhet.

I. Megoldás próbálgatással

A legegyszerűbbek azok az egyenletek, amelyek egyik oldalán szám, másik oldalán pedig egy szám és az ismeretlen valamilyen művelettel való összekapcsolása szerepel. Első évfolyamon ez a művelet összeadás vagy kivonás, második évfolyamtól kezdve viszont bármelyik alpművelet lehet.

Ennek megfelelően a feladat a hiányzó összeadandó, kibővíthető vagy kivonandó, illetve valamilyen szorzótényező, osztandó vagy osztó meghatározása. (Például: $13 - \square = 5$ vagy $9 \cdot \square = 36$.)

Egy-egy új művelet bevezetésének, fogalmi kialakításának időszakában még nem várhatjuk el a tanulóktól, hogy az ismeretlen művelettel számítsák ki. Ilyenkor még csak a próbálgatás, a többszöri behelyettesítés módszerét alkalmazhatják tudatosan, miközben fejben számolnak. A $13 - \square = 5$ feladatnál például kipróbálhatják a 10-et, és észrevehetik, hogy így túl sokat vettek el (helyesebben túl nagy számot vontak ki).

A további próbálkozásoknál – ez irányú tapasztalataiktól függően – figyelembe vehetik az adott művelet tulajdonságait. Ebben a feladatban például a kivonásnak azt a tulajdonságát, hogy ugyanabból a számból kisebb számot kivonva az eredmény nagyobb lesz. Vagyis 10-nél kisebb számmal érdemes próbálkozni. A kellő jártasság a műveletvégzésben a próbálgatásos módszer-nél gyorsan eredményre vezet.

Azokat a feladatokat is ide sorolhatjuk, amelyek az alaphalmaz összes elemének behelyettesítését várják el a tanulóktól. Ezáltal azt is megtudhatják, hogy mely számok teszik hamissá a nyitott mondatot.

II. Megoldás a műveletek közötti kapcsolat alapján

A művelettel történő kiszámításra ezeknél az egy műveletet tartalmazó nyitott mondatoknál csak akkor kerülhet sor, ha a tanulók már kellő tapasztalatot szereztek az ellentétes műveletek (az összeadás és a kivonás, a szorzás és az osztás) kapcsolatáról. Ezeknek a tapasztalatoknak az egyik része a műveletek (például a kivonás összeadással, az osztás szorzással történő) ellenőrzésére, másik része a műveletek tulajdonságaira (például a tagok vagy a tényezők felcserélhetőségére) vonatkozik.

Megkönnyíti az ismeretlen kiszámításának magyarázatát, ha a nyitott mondatot nyilakkal is lejegyezzük, illetve rajz segítségével is láttatjuk a számok és az ismeretlenek viszonyát.

Az egyműveletes nyitott mondatoknál – az ismeretlentől függően – hat alapesetet különböztethetünk meg. Az ismeretlen kiszámításának mikéntjét egy-egy példán keresztül mutatjuk be.

a) A hiányzó összeadandót kivonással határozhatjuk meg.

$$\bigcirc + 190 = 720 \quad \bigcirc \begin{array}{c} \xrightarrow{+190} \\ \xleftarrow{-190} \end{array} 720 \quad \bigcirc = 720 - 190$$

b) A hiányzó kisebbítendőt összeadással határozhatjuk meg.

$$\bigcirc - 190 = 530 \quad \bigcirc \begin{array}{c} \xrightarrow{-190} \\ \xleftarrow{+190} \end{array} 530 \quad \bigcirc = 530 + 190$$

c) A hiányzó kivonandót kivonással határozhatjuk meg.

$$720 - \bigcirc = 190 \quad 720 \begin{array}{c} \xrightarrow{-\bigcirc} \\ \xleftarrow{+\bigcirc} \end{array} 190$$

Ha az ismeretlent helyesen határoztuk meg, akkor az ellenőrzésnél a $190 + \bigcirc = 720$ egyenlőségnek is teljesülnie kell.

Ez pedig egy pótlási feladat (a) eset), tehát

$$\bigcirc = 720 - 190$$

d) A hiányzó szorzótényezőt osztással határozhatjuk meg.

$$\bigcirc \cdot 5 = 35 \quad \bigcirc \begin{array}{c} \xrightarrow{\cdot 5} \\ \xleftarrow{: 5} \end{array} 35 \quad \bigcirc = 35 : 5$$

e) A hiányzó osztandót szorzással határozhatjuk meg.

$$\bigcirc : 7 = 35 \qquad \bigcirc \begin{array}{c} : 7 \\ \longleftrightarrow \\ \cdot 7 \end{array} 5 \qquad \bigcirc = 5 \cdot 7$$

f) A hiányzó osztót osztással határozhatjuk meg.

$$35 : \bigcirc = 5 \qquad 35 \begin{array}{c} : \bigcirc \\ \longleftrightarrow \\ \cdot \bigcirc \end{array} 5$$

Ha az ismeretlent helyesen határoztuk meg, akkor az ellenőrzésnél az $5 \cdot \bigcirc = 35$ egyenlőségnek is teljesülnie kell.

A feladatot a hiányzó tényező meghatározására vezettük vissza (d) eset), tehát $\bigcirc = 35 : 5$.

Megjegyzés:

A hat alapesetnél megfigyelhetjük, hogy bizonyos esetben az ismeretlent a nyitott mondatban szereplő művelettel ellentétes, máskor pedig vele megegyező művelettel számíthatjuk ki.

III. Megoldás lebontogatással

A lebontogatás módszerét azoknál az egyenleteknél használhatjuk, amelyek egyik oldalán szám áll, a másik oldalán pedig az ismeretlen valamilyen *lineáris kifejezése* (például: $5 \cdot \square - 7 = 38$). A módszer elnevezése onnan ered, hogy az eredeti egyenletet lebontjuk, vagyis (egyre) egyszerűbb egyenletté alakítjuk. Az ismeretlenhez így néhány lépésben jutunk el, miközben a művelettel történő kiszámítás hat alapesetének valamelyikét alkalmazzuk.

Egy egyszerűbb és egy összetettebb példa:

a) $100 : \square + 17 = 37$

1. lépés: $100 : \square = 20$, mert $20 + 17 = 37$.

2. lépés: $\square = 100 : 20 = 5$, mert $5 \cdot 20 = 100$.

b) $2 \cdot (3 \cdot x + 1) - 9 = 17$

1. lépés: $2 \cdot (3 \cdot x + 1) = 17 + 9$

2. lépés: $2 \cdot (3 \cdot x + 1) = 26$

3. lépés: $3 \cdot x + 1 = 26 : 2$

4. lépés: $3 \cdot x + 1 = 13$

5. lépés: $3 \cdot x = 12$

6. lépés: $x = 12 : 3$

7. lépés: $x = 4$

Az egyenletek megoldását az eredeti egyenletbe helyettesítéssel ellenőriztessük a tanulókkal.

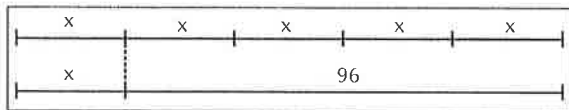
Megjegyzés:

A lebontatással történő megoldás megértését segíti, ha az egyenletet az ismeretlenből kiindulva nyilakkal jegyezzük le. Így a végeredménytől visszafelé haladva ellentétes műveletekkel juthatunk el az ismeretlen meghatározásához. Például a b) feladatnál:



A fennmaradó három egyenletmegoldási módszer bemutatására lássuk ugyanazt a példát: $5 \cdot x = x + 96$.

IV. Megoldás rajz segítségével (szakaszos ábrázolással) (2.28. ábra)



2.28. ábra

A rajzról leolvasható, hogy $4 \cdot x = 96$, amiből $x = 96 : 4 = 24$.

V. Megoldás a „túl kicsi – túl nagy” módszerrel

Adjunk x -nek különböző értékeket, és számítsuk ki a nyitott mondat bal és jobb oldalának értékét ezeken a helyeken! Hasonlítsuk össze a kapott két számot, és ezt vegyük figyelembe a következő x érték megválasztásakor! Ezáltal a nyitott mondat megoldásához fokozatosan („egymásba skatulyázott” intervallumok sorozatával) jutunk el.

x	$5 \cdot x$		$x + 96$
10	50	<	106
100	500	>	196
50	250	>	146
20	100	<	116
25	125	>	121
24	120	=	120

A megoldás tehát 10 és 100 között van.

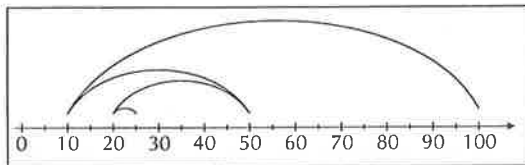
A megoldás tehát 10 és 50 között van.

A megoldás tehát 20 és 50 között van.

A megoldás tehát 20 és 25 között van.

A megoldás tehát a 24.

Az ismeretlen fokozatos megközelítését a számegyenesen is szemléltethetjük (2.29. ábra):



2.29. ábra

VI. Megoldás következtetéssel (az eltérés változásának megfigyelésével)

Helyettesítsünk az x helyére egymást követő számokat (számszomszédokat)!

Számítsuk ki a bal és a jobb oldal értékét, majd ezek különbségét (helyesebben eltérését) is!

	x	$5 \cdot x$	$x + 96$	Eltérés
	10	50	106	56
+1 ↓	11	55	107	52
+1 ↓	12	60	108	48
+12 ↓	24	120	120	0

Megfigyeltethetjük, hogy ha az x helyére 1-gyel nagyobb számot írunk, akkor az eltérés 4-gyel csökken. Ahhoz, hogy az eltérés 0 legyen, még 48-cal, azaz $12 \cdot 4$ -gyel kell csökkentenünk. Tehát az x -et az utolsó próbálkozáshoz (12) képest még 12-vel kell növelnünk. Így az egyenlet megoldása:

$$x = 12 + 12 = 24.$$

Megjegyzések:

- Az V. és a VI. módszert tervszerű próbálgatásnak is nevezhetjük.
- Az egyenletek általános megoldási módszerét, a mérlegelvet alsó tagozaton még nem tanítjuk. Ennek tárgyalására csak a 6. évfolyamon kerül sor.
- Az említett hat, alsó tagozaton tárgyalható egyenletmegoldási módszer közül az első négy csak bizonyos, egyszerűbb alakú egyenletek megoldására alkalmas. Univerzálisan alkalmazható viszont az V. és a VI. eljárás.
- Önmagában is érdekes, de a függvényyszerű gondolkodás kialakításában különösen hasznos a következtetéssel történő megoldás.

Egyenlőtlenségek megoldása

Az egyenlőtlenségek megoldása alsó tagozaton próbálgatással vagy tervszerű próbálgatással történhet. A tervszerű próbálgatásnál először azt a legkisebb, illetve legnagyobb természetes számot célszerű megkeresni, amely még (már) igazgá teszi a nyitott mondatot. Ebben a keresésben érdemes az adott $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ relációt első megközelítésben egyenlőséggel helyettesíteni, vagyis az egyenlőtlenséget egyenletnek tekinteni. A megoldás- vagy igazsághalmaz többi elemének tudatos meghatározásakor az alapműveletek tulajdonságaira támaszkodhatunk. Azokra az elemi összefüggésekre, amelyek az összeg, a különbség, a szorzat és a hányados változására, illetve változtatlanságára vonatkoznak.

Két példa:

a) $\square + 8 \geq 15$

Ha a „ $\geq$ ” reláció helyére „ $=$ ” jelet írunk, akkor a $\square + 8 = 15$ pótlási feladat megoldása: $\square = 15 - 8 = 7$.

Az összeadásnak itt azt a tulajdonságát vehetjük figyelembe, miszerint az összeg is nő, ha valamelyik tagot növeljük, miközben a másik tagot változtatlanul hagyjuk (lásd 1.4.1. fejezet). Az eredeti egyenlőtlenséget tehát a 7 és a nála nagyobb számok teszik igazgá: $\square \geq 7$.

b) $7 \cdot \square - 3 < 50$

Ennél a feladatnál nem válik be, ha a „ $<$ ” reláció helyett „ $=$ ” jelet írunk, mert a kapott egyenletnek nincs egész megoldása (nincs olyan egész szám, amelynek 7-szerese 53). Néhány próbálkozás után viszont könnyű felismerni, hogy a 8 még nem, de a 7 már igazgá teszi a nyitott mondatot. A további megoldások keresésekor csak a 7-nél kisebb számokkal érdemes próbálkozni, hiszen csak így csökkenthetjük a bal oldal értékét. Az egyenlőtlenség megoldása: $\square = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (vagy másképpen lejegyezve: $1 \leq \square \leq 7$).

Az egyenlőtlenségpár ugyanarra a kifejezésre vonatkozó két egyenlőtlenség egyszerűbb lejegyzésére szolgál. (Már az 1. évfolyamon is használjuk, például a számszomszédok viszonyára vonatkozó $10 < 11 < 12$ típusú lejegyzéseket.) Ennek megfelelően az egyenlőtlenségpárok megoldáshalmazát a két egyenlőtlenség közös megoldásai szolgáltatják.

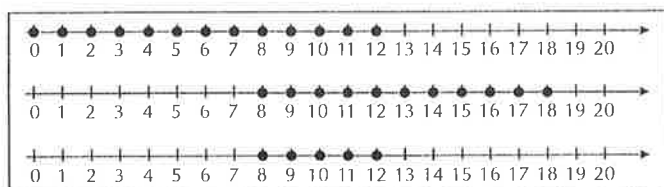
Egy példa:

$$50 \leq 4 \cdot x + 18 < 70$$

A $4 \cdot x + 18 < 70$ egyenlőtlenség (nem negatív egész) megoldásai:

$x = 0, 1, 2, \dots, 12$. Az $50 \leq 4 \cdot x + 18$ egyenlőtlenséget a természetes számok közül az $x = 8, 9, 10, \dots$ értékek teszik igazgá. A két egyenlőtlenség igazsághalmazának közös részét (az eredeti egyenlőtlenségpár megoldásait) az $x = 8, 9, 10, 11, 12$ számok alkotják.

A közös rész megállapításában segít, ha az egyenlőtlenségek megoldásait egy-egy számegyenesen ábrázoljuk, majd egy harmadik számegyenesre „átvezetjük” a közös pontokat (2.30. ábra):



2.30. ábra

A számegyenesek helyett természetesen halmazábrát is használhatunk a megoldás szemléltetésére. A metszetbe kerülés még jobban nyomatékosítja az „és” kapcsolatot, vagyis azt, hogy a két egyenlőtlenséget igazgá tevő számok közös része jelenti a megoldást (lásd 2.1.4. fejezet).

2.2.3. Két ismeretlent tartalmazó nyitott mondat megoldása táblázattal

A két- vagy háromváltozós nyitott mondatok megoldásánál azt kell tudatosítanunk a tanulóknban, hogy a megoldáshalmazt nem számok, hanem számpárok, illetve számhármások alkotják. Alsó tagozaton a megoldás keresésének egyetlen lehetséges módja a próbálgatás, amelyet célszerű táblázatban rögzíteni. Egyszerűbb esetekben, például a számok (nyitott mondatnak megfelelő) bontásakor tervszerű próbálgatást és az összes megoldás előállítását is elvárhatjuk a tanulóktól.

1. példa

Írd a táblázatba, hogy mely számpárok teszik igazgá a nyitott mondatot!

$$2 < x + y < 5$$

x									
y									

2. példa

Hány darab fehér és hány darab rózsaszín rúd felhasználásával tudjuk a zöld rudat kirakni, ha mindkét fajtából legalább 1-et fel kell használnunk?

Megjegyzések:

- Ha ez utóbbi feladattal egy kétváltozós nyitott mondat felírása és megoldása a célunk, akkor frontális osztálymunkában az alábbi lépések szerint járhatunk el:

a) Jelölések bevezetése: Jelöljük például f -fel a fehér, és r -rel a felhasznált rózsaszín rudak számát!

b) Nyitott mondat felírása: Ha a fehér rúd 1-et ér, akkor a rózsaszín rúd 2-t, a zöld pedig 12-t. A felhasznált fehér és rózsaszín rudakat összeolva kapjuk meg a zöld rudat, ezért:

$$f + r \cdot 2 = 12$$

c) Táblázat készítése: Mivel r megválasztására kevesebb lehetőség adódik, ezért célszerű először r -nek értékeket adni a táblázatban:

r	1	2	3	4	5
$r \cdot 2$	2	4	6	8	10
f	10	8	6	4	2

A megoldások száma tehát 5.

- A feladatot természetesen nyitott mondat nélkül, a lényegesen különböző szövegezések létrehozásával (tevékenységgel) is megoldhatják a tanulók. A folytatásra, a nehezebb problémák modellezésére gondolva azonban ez a feldolgozási mód a hasznosabb. A kirakások ebben az esetben ellenőrzésre szolgálhatnak.

2.3. Szöveges feladatok és tanításuk

A szöveges feladatok már az alsó tagozaton sem szűkíthetők le az egyszerű, egyenes szövegezésű feladatokra, nem egyszerűsíthetők le számfeladatok kiszámításával megválaszolható problémákra. Tanításuk komoly szakmai felkészültséget vár el a tanítóktól. Tisztában kell lenniük a szöveges feladatok komplex problémakörével: tanításuk célrendszerével, alaptípusaival, megoldásuk módszereivel, órai feldolgozásuk lépéseivel, lejegyzésük mikéntjével és így tovább.

2.3.1. A szöveges feladat fogalma és szerepe a tanításban

Mindenekelőtt tisztázzuk, hogy mit is értünk szöveges feladaton!

Nyelvezetére az egyszerű, köznyelvi megfogalmazás a jellemző, matematikai fogalmakat, összefüggéseket csak nagyon ritkán tartalmaz. Egy másik fontos tulajdonsága, hogy tartalommal felruházott mennyiségekről, nem pedig pusztán számokról szól. Megoldásához valamilyen matematikai modellre (rajzra, nyitott mondatra, táblázatra, halmazábrára stb.) van szükség, amely alapján műveletek elvégzésével jutunk eredményre. Ha ezeket az ismérveket elfogadjuk, akkor a szöveges feladatok családját így írhatjuk körül: *A szöveges feladat olyan életszerű, gyakorlati problémafelvetés, amelyben az ismert és az ismeretlen mennyiségek közötti összefüggés (összefüggések) szövegesen van megadva, és megoldásához valamilyen matematikai modellre van szükség.*

Ebből a meghatározásból következik, hogy a szöveges feladatok leginkább az alábbi, egymással is összefüggő témacsoportokhoz kapcsolódnak:

- számtan–algebra,
- halmazok–logika,
- nyitott mondatok,
- függvények,
- mérések.

A matematika tantárgy és tudomány is egyszerre. A szöveges feladatok ugyanazt a fontos szerepet töltik be a matematika műveltségterületen belül, mint az alkalmazott matematika a matematikatudományok rendszerében. Mindketten a matematika és a valóság közötti kölcsönhatás kifejezői. A szöveges feladatok alsó tagozatos feldolgozásával valójában a komolyabb és bonyolultabb gyakorlati problémák matematikai modellezésének képességét alapozzuk meg tanítványainkban. Segítségükkel fejleszthetjük továbbá a tanulók szövegértését, ítélő-, emlékező-, lényegkiemelő és önellenőrző képességét. A szöveges feladatok a műveletfogalom kialakításában és a műveletvégzés közvetett gyakoroltatásában is meghatározó szerepet töltenek be.

Megjegyzés:

Hasonlítsuk össze az alábbi két feladatot!

- a) Egy osztályból a hetes jelentése szerint 4-en hiányoznak, így most csak 17-en vannak jelen. Hány tanuló jár az osztályba?
- b) Melyik az a szám, amelyből 4-et kivonva 17-et kapunk?

Azt gondolhatnánk, hogy a két feladat tulajdonképpen megegyezik, mert mindkettőt például a $\square - 4 = 17$ nyitott mondatral oldhatjuk meg. Az alkal-

mazott modell szempontjából tehát nincs közöttük különbség. Mégis a *b)* feladat nem egy gyakorlati, hanem egy matematikai problémafelvetés, ezért csak tágabb értelemben tekinthetjük szöveges feladatnak. Ugyanez a helyzet az összes „Gondoltam egy számot ...” kezdetű feladattal is.

2.3.2. Szöveges feladatok rendszerezése

A szöveges feladatokat is csak akkor taníthatjuk színesen, változatosan és az életkornak megfelelő mélységben, ha tisztában vagyunk a lehetőségekkel. Az ebben való eligazodást segíti a következő, több szempontú rendszerezés. Hét olyan szempontot adunk meg, amelyekre minden évfolyamon tekintettel kell lennünk.

I. Keletkezésük szerint beszélhetünk

- I.1. előre adott, ezen belül
 - I.1.1. szóban közölt vagy
 - I.1.2. írásban rögzített,
- I.2. konstruálással kapott, ezen belül
 - I.2.1. képhez,
 - I.2.2. számfeladathoz,
 - I.2.3. nyitott mondathoz,
 - I.2.4. megfigyeléshez kapcsolt vagy
 - I.2.5. önálló kérdés kiegészítéssel teljessé tett feladatról.

II. Témájuk szerint alapvetően

- II.1. darabszámmal,
- II.2. vásárlással (pénzzel),
- II.3. mozgással (utazással),
- II.4. méréssel (például kerület-, terület-, űrtartalom-, időtartam-meghatározással) vagy
- II.5. osztozkodással (szétosztással) kapcsolatosak.

III. Szövegezésük szerint

- III.1. egyenes vagy
- III.2. fordított szövegezésűek.

IV. Bonyolultság szerint

- IV.1. egyszerű (egy művelettel megoldható) vagy
- IV.2. összetett (két vagy több művelettel megoldható) feladatok.

V. Az ismeretlenek száma szerint beszélhetünk

V.1. egyismeretlenes vagy

V.2. többismeretlenes (általában kétismeretlenes) feladatokról.

VI. A megoldások száma szerint lehetnek

VI.1. egymegoldásúak (az esetek többségében),

VI.2. többmegoldásúak (például függvényre, kétismeretlenes egyenlre vezető) vagy

VI.3. megoldhatatlanok (hiányosak vagy ellentmondóak).

VII. Az adatok relevanciája szerint beszélhetünk

VII.1. fölösleges, lényegtelen (irreleváns) adatokat nem tartalmazó,

VII.2. lényegtelen adatokat is tartalmazó, illetve

VII.3. adathiányos feladatokról.

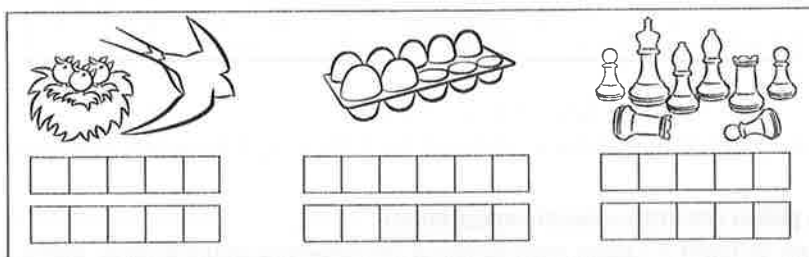
A rendszerezési szempontokhoz illeszkedően lássunk néhány példát!

I.1.2. példa (előre adott, írásban rögzített)

A hétvégén vásárolni voltam. Megszámoltam, hogy a pénztárnál 6-an álltak előttem, és 5-en mögöttem. Hányan álltunk a sorban összesen?

I.2.1. példa (konstruálással kapott, képhez kapcsolt)

Írj két kivonást mindegyik képről! Mondd is el, hogy melyik mire válaszol!
(2.31. ábra)



2.31. ábra

I.2.2. példa (konstruálással kapott, számfeladathoz kapcsolt)

Alkoss szöveges feladatot a számfeladathoz! Mondd el szóban!

a) $14 + 7$

b) $100 - 56$

c) $48 : 2$

d) $3 \cdot 12 + 1$

I.2.3. példa (konstruálással kapott, nyitott mondathoz kapcsolt)

Találj ki szöveges feladatot a nyitott mondatokhoz!

- a) $760 + \square = 1000$ b) $2 \cdot \square = 68$ c) $19 < \square < 26$

I.2.4. példa (konstruálással kapott, megfigyeléshez kapcsolt)

A tanító megméri először egy vízzel teli kancsó tömegét, majd a vizet kiöntve az üres kancsó tömegét. A gyerekek a látottak és a mérési eredmények ismeretében szöveges feladatot fogalmaznak meg, amelyben a kiöntött víz tömege lehet a kérdés.

I.2.5. példa (konstruálással kapott, önálló kérdés kiegészítéssel teljessé tett)

Kérdezz, számolj, ellenőrizz, válaszolj!

- a) Már csak negyedóra van hátra a focimeccsből.
b) A 823 fizető nézőből 49-en hazamentek a szünetben.
c) Eddig 8 gól esett összesen, és a hazai csapat 2 góllal vezet.
d) A mérkőzésen 3 játékost kiállítottak.

II.3. példa (mozgással kapcsolatos)

A táblázatban néhány város autóúton mért távolsága van megadva:

	Baja	Budapest	Debrecen	Pécs	Sopron
Baja		195 km	299 km	88 km	310 km
Budapest	195 km		226 km	198 km	217 km
Debrecen	299 km	226 km		367 km	436 km
Pécs	88 km	198 km	367 km		287 km
Sopron	310 km	217 km	436 km	287 km	

Hány km hosszú a Baja–Budapest–Debrecen–Baja útvonal? Hány liter üzemanyagot fogyasztana a gépkocsi, ha 1 literrel 24 km-t tudna megtenni?

II.5. példa (osztzkodással kapcsolatos)

Három jó barát 27 szem szaloncukron igazságosan osztzkodott. Hány szaloncukor jutott egy gyereknek?

Az egyenes és a fordított szövegezésű feladatok közötti alapvető különbséget a nyitott mondatok oldaláról közelíthetjük meg. Az egyenes szövegezésű feladatot modellező nyitott mondat explicit alakú, az ismeretlen – a szöveges utalások alapján – egy művelettel vagy egy műveletssorral fejezhető ki:

III.1. példa (egyenes szövegezésű)

Hófehérke palacsintát sütött. Minden törpe 4 palacsinát evett meg, csak Kükának jutott 3. Hány palacsintát sütött Hófehérke, ha ő is evett 2-t?

Megoldás

Ha a kérdésre adandó választ $\square$ -tel jelöljük, akkor a $\square = 6 \cdot 4 + 3 + 2$ explicit alakú nyitott mondatot írhatjuk fel a feladathoz.

A fordított szövegezésű feladatokhoz tartozó nyitott mondatok implicit alakúak, az ismeretlent burkoltan tartalmazzák:

III.2. példa (fordított szövegezésű)

Mennyi pénzem van? Nyitott mondat felírásával és megoldásával válaszolj!

a) Ha kapnék még hozzá 430 Ft-ot, akkor 680 Ft-om lenne.

b) Ha elköltenék belőle 120 Ft-ot, akkor már csak 310 Ft-om maradna.

Megoldás

Ha az ismeretlent p -vel jelöljük, akkor az a) feladatrésznél a $p + 430 = 680$, a b)-nél pedig a $p - 120 = 310$ implicit alakú nyitott mondat írja le az eredeti szövegösszefüggést.

Megjegyzés:

A fordított szövegezésű feladatok között gyakoriak azok, amelyekben a szöveg a megoldáshoz szükséges művelet helyett az ellentétes művelet alkalmazását sugallja, s így a tanulók – helytelenül – egyenes szövegezésűnek tekintik a feladatot.

Például 1000 Ft-om van, 50 Ft-tal *kevesebb*, mint Lacinak. Hány Ft-ja van Lacinak?

Laci pénzét x -szel jelölve a szövegösszefüggésből az $1000 = x - 50$ implicit alakú nyitott mondat következik. Ennek megoldásához összeadásra van szükség ($x = 1000 + 50$), annak ellenére, hogy a *kevesebb* szó kivonásra utal.

IV.1. példa (egy művelettel megoldható)

Egy dobozban 4 teniszlabda van. Hány teniszlabda van 23 ilyen dobozban?

IV.2. példa (több művelettel megoldható)

Egy lakópark építéskor a kitermelt földet két teherautóval szállították el. Az egyik teherautó 8 t földdel 27-szer fordult, a másik teherautó 10 t földdel 35-ször. Hány tonna földet szállított el a két teherautó összesen?

V.1. példa (egyismeretlenes)

Egy színházban ebben az évben 9726 jegyet adtak el összesen. Hány felnőtt látogatója volt a színháznak, ha a gyerekek közül 1213 fiú és 147-tel több lány váltott jegyet?

V.2. példa (többsismeretlenes)

Két hordóban must van. Az egyikben 3-szor annyi must van, mint a másikban. Ha az egyik hordóba még 50 liter mustot öntenénk, akkor ugyanannyi must lenne mindkét hordóban. Hány liter must van a két hordóban külön-külön és összesen?

VI.3. példa (megoldhatatlan)

Lehet-e 14 rétes között kétszer annyi diós, mint mákos?

Ha a rétesek számáról azt tudnánk, hogy 10-nél több, de 15-nél kevesebb, akkor milyen esetben lenne a feladatnak megoldása?

VII.2. példa (lényegtelen adatokat is tartalmazó)

Petra szokása szerint a 49-es villamossal ment az iskolába. A megállótól csak 113 lépést kellett megtennie a 3-as számú iskola kapujáig. 7 gyerek már az osztályban volt, így Petra 8.-nak lépett a terembe. Még 11 gyerek érkezett a csengetésig. Hány tanulóval kezdődött meg a tanítás?

Ez utóbbi feladatban nemcsak a lényeges és a kérdés szempontjából lényegtelen adatokat különíthetjük el egymástól, hanem a feladatban szereplő számok jelentéstartalmát (jelzőszám, mérőszám, darabszám, sorszám) is megbeszélhetjük.

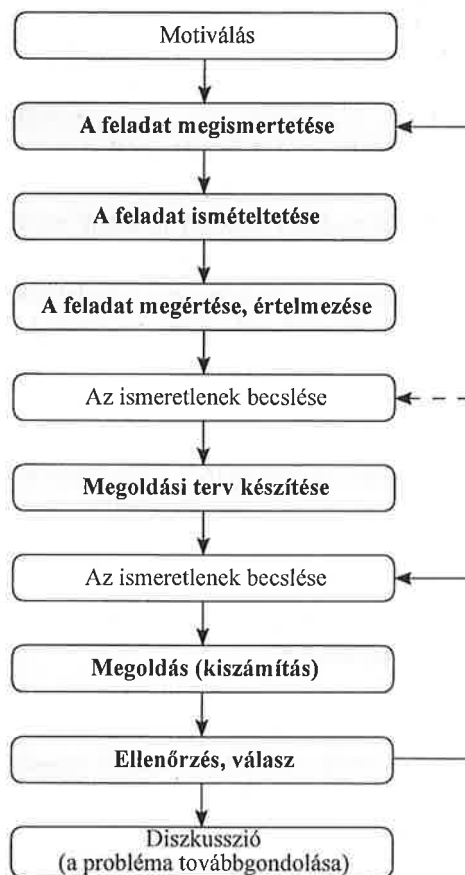
Megjegyzések:

- A tanulók szövegértését a csak szóban elhangzó és az írásban (tankönyvekben, feladatgyűjteményekben, felmérőkben) adott szöveges feladatok feldolgozásával egyaránt fejleszteniünk kell. (A nyelvtanulásnál is mást jelent a hallás utáni megértés, mint az írott szöveg elolvasás utáni értelmezése.)
- A tanórákon ne csak a különböző dokumentumokban szereplő feladatokat dolgozzuk fel. Még jobban megszerettethetjük a matematikát olyan, szóban megfogalmazott, „élet produkálta” egyszerű feladatokkal, amelyek a gyerekek iskolai vagy szabadidős tevékenységéhez kapcsolódnak.

- Nagyon egyszerű, egy művelettel és fejben kiszámítható szöveges feladatoknál ne ragaszkodjunk minden esetben az írásbeli lejegyzéshez. Időt takaríthatunk meg, ha bizonyos esetekben megelégszünk a szóbeli válaszadással.
- Hasznos, ha a tanulók megoldhatatlan feladatokkal is találkozhatnak. Nem szerencsés ugyanis ahhoz a hamis illúzióhoz szoktatnunk őket, hogy bármilyen feltételrendszer mellett találnak megoldást, és „rossznak” nevezzék azokat a feladatokat, amelyek nem oldhatók meg. (Sokszor nehezebb megindokolni azt, hogy egy feladatnak miért nincs megoldása, mint egy megoldható feladat helyes megoldását megtalálni.) A megoldhatatlan feladatok továbbgondolásra, a feltételek megváltoztatására is ösztönöznek.
- Az ítélőképesség és a szövegértés fejlesztését figyelembe véve szintén hasznosak a kérdés szempontjából főleg információt (adatokat vagy összefüggéseket) tartalmazó problémafelvetések. Mind a négy osztályban adjunk fel néhány ilyen jellegű feladatot is!
- A fordított szövegezésű feladatoknak – még a gyengébb képességű osztályokban is – megfelelő hangsúlyt adjunk a tanításban, ne csak differenciálásra szánjuk azokat.

2.3.3. A szöveges feladatok órai feldolgozásának általános lépései

A szöveges feladatok tanórai feldolgozásának legfontosabb lépéseit – *Pólya György* javaslatait is figyelembe véve – egy folyamatábrával szemléltethetjük. A folyamatábra utasításai közül szürke tónussal emeltük ki azokat a lépéseket, amelyeket minden esetben, a fordított szövegezésű feladatoknál pedig különösen célszerű betartani.



Motiválás

A motiválás cselekvésre (gondolkodásra, rajzolásra, kirakásra, számolásra, ...) való ösztönzést jelent. Egy érdekes vagy egy tréfás feladat önmagában is motiváló erejű (természetesen csak akkor, ha a gyerekek is annak találják). A tanulók fokozott aktivitására számíthatunk például a következő két feladat megbeszélése, megoldása kapcsán:

1. példa

A döbrögi vásárban 2 libáért 1 pulykát adnak. 1 pulyka és 2 liba 5 tallérral többbe kerül, mint 3 liba. Hány tallérba kerül egy pulyka? Hány tallérba kerül egy liba?

Szintén koncentrált problémamegoldásra ösztönözhet egy tevékenység megfigyeléséből születő szöveges feladat. Pozitívan befolyásolhatjuk a gyerekek érdeklődését, odafigyelését, ha a feladatot egy rövid beszélgetéssel (dialógussal) vezetjük be. A motiváció ebben az esetben tartalmi „ráhangolást” jelent, amelylyel körvonalazhatjuk, hogy miről is lesz szó a feladatban. Például: Ki az, aki járt már virágboltban és vásárolt is valamit? Milyen virágokat árúsítottak? Körülbelül hány szál virág volt a vázában? Hány szál virágból kértek csokrot az előtted vásárlók? ... A következő feladatban is egy virágüzletről lesz szó.

2. példa

Egy virágüzletbe 40-nél több, de 50-nél kevesebb szál gerbera érkezett. Az összes gerbera elfogyna, ha az eladó akár hármasával, akár négyesével kötné őket csokorba. Hány szál gerbera érkezhetett a virágboltba?

Előzetes beszélgetésre feltétlenül szükség van azoknál a feladatoknál, amelyekben szereplő kifejezések, fogalmak vagy szabályok ismeretét nem tételezhetjük fel minden tanulótól.

A feladat ismertetése, értelmezése

A szöveges feladatok rendszerezésénél megállapítottuk, hogy keletkezésük szerint vagy előre adottak, vagy konstruálással jönnek létre. Az utóbbi esetben a szöveges feladatot a gyerekek önállóan alkotják, fogalmazzák meg.

A tanórákon természetesen nagyobb arányban szerepelnek az előre adott feladatok. Kezdetben, főleg 1. évfolyamon – a tanulók olvasástechnikai problémái miatt – a tankönyvben szereplő szöveges feladatok többségét a tanító olvassa fel. A feladatok megértésében sokat segíthetünk a szöveg megfelelő hangsúlyozásával, közlés közben rövid szünetek beiktatásával, az ismert és a megválaszolandó mennyiségek nyomatékosításával. Később már a tanulóktól (általában a jól olvasó gyerekektől) várjuk el a feladatismertetést, akár többször is felolvastatva a szöveget.

Az elhangzott feladat ismétlésével fejleszthetjük tanítványaink koncentráló-, lényegfelismerő, memorizációs és kommunikációs képességét. Nem a szöveg hű visszaadás, a feladatban szereplő nevek, számok pontos felidézése a lényeg. Ennél sokkal fontosabb, hogy a saját szavaikkal is meg tudják fogalmazni a szövegben szereplő lényeges információkat. Azt, hogy mi az, amit tudunk, és mi az, amit keresünk.

Egyszerűbb feladatoknál az adatok és az ismeretlenek jól elkülönülnek egymástól, így az ismétlés is könnyebb.

Összetettebb feladatoknál viszont az adatok és az ismeretlenek közötti összefüggésre való emlékezés lényegesen nehezebb:

3. példa

Egy hetilap 160 Ft-ba kerül. Éves előfizetési díja 6500 Ft. Mennyit fizetnénk a hetilapért egy év alatt, ha minden héten megvásárolnánk? Mennyivel fizetnénk így többet az éves előfizetési díjnál?

Az ilyen hosszabb szövegezésű vagy sok adatot, esetleg két kérdést is tartalmazó feladatoknál megelégedhetünk azzal, hogy több tanulótól gyűjtjük össze a fontos információkat. Végül egy gyerekkel összefoglaltathatjuk a hallottakat.

Egyszerűbb, általában egyenes szövegezésű feladatok értelmezésében nagy segítséget jelent a probléma „láttatása”, tárgyi megjelenítése. A történet eljátszásával, lerajzolásával vagy kirakásával a gyerekeknek lényegesen könnyebb elképzelni a szituációt, és a látott „képről” a megoldás sokszor közvetlenül is leolvasható (a megértés és a megfejtés nagyon közel kerül egymáshoz).

Kezdetben olyan problémákat adjunk, amelyeket a gyerekek „tárgyhűen” tudnak megjeleníteni. Később, az absztrakciós folyamat apró lépéseként a feladat „szereplőit” pálcikákkal, korongokkal, színes rudakkal helyettesíthetik a gyerekek:

4. példa

Egy parasztház udvarán kacsákat és kismalacokat láttam. 5 fejet és 14 lábat számoltam össze. Hány kacsát és hány kismalacot láttam az udvaron?
Az állatok fejét korongokkal, a lábaikat pálcikákkal helyettesítsd!

Megjegyzés:

A kirakással történő megjelenítéshez úgy kezhetnek a gyerekek, hogy minden korong alá 2 pálcikát raknak (mintha csak kacsákról lenne szó). A megmaradt 4 pálcikából kettőt-kettőt adhatnak még a négy lábúaknak (a kismalacoknak). A helyes kirakás nemcsak a feladat megértését bizonyítja, hanem egyúttal láttatja is a megoldást (3 kacsa, 2 kismalac).

A szövegösszefüggések megértéséről visszajelzést kaphatunk úgy is, hogy egy hibás megoldásról kérjük ki a tanulók véleményét. Elsősorban a fordított szövegezésű feladatoknál érdemes néha feltenni a „Lehet-e megoldás a ...” kezdetű kérdést:

5. példa

Andi és Niki testvérek. Életkoruk szorzata 24, életkoruk összege 10 év. Lehet-e Andi 3 éves, Niki pedig 8 éves?

Az ismeretlenek becslése

A folyamatábrán nem kötelező jelleggel tüntettük fel ezt a lépést. Egyébként sincs értelme becsltetnünk például az egyszerű, fejben is megoldható szöveges feladatoknál, hiszen a kérdés azonnal és pontosan megválaszolható.

Az ismeretlen (ismeretlenek) becslése a kérdésre (kérdésekre) adandó válasz (válaszok) reális közelítését, behatárolását, illetve az irreális lehetőségek kizárását jelenti. Erre a lépésre a folyamatábra alapján két ponton is sor kerülhet:

Becslés a megoldási terv készítése előtt

Bizonyos esetekben nem szükséges megoldási terv ahhoz, hogy az ismeretlenek szóba jöhető értékeit behatárolhassuk. Ezeknek a becsléseknek a megadásához elegendő pusztán a feladat megértése, értelmezése. Egy példa:

6. példa

Ernő 7 kg-mal nehezebb Andrásnál. Ha egyszerre állnak a fürdőszobai mérlegre, akkor az 70 kg-ot mutat. Melyik gyerek hány kg?

Ennél a feladatnál például próbálgatással juthatunk különböző becslésekhez:

- Ha András 30 kg, akkor Ernő 37 kg (összesen: 67 kg, ami túl kevés).
- Ha András 40 kg, akkor Ernő 47 kg (összesen: 87 kg, ami túl sok).

A két próbálkozás alapján mondhatjuk tehát, hogy András testtömege 30 és 40 kg között van, Ernőé pedig 37 és 47 kg közötti érték.

Becslés a megoldási terv birtokában

A szöveges feladatok feldolgozása közben gyakrabban fordul elő, hogy már a kész, elfogadott megoldási terv birtokában becsltetjük az eredményt. Ez a fajta becslés valójában már egy művelet vagy egy műveletsor eredményére, illetve egy nyitott mondat ismeretlenjének behatárolására vonatkozik. A becslés ebben az esetben kerekítéssel vagy próbálgatással történhet. Természetesen csak akkor juthatunk reális becsléshez, ha helyes megoldási tervet állítottunk fel.

7. példa

Az állatkertben az idén 9283 jegyet adtak el összesen. Hány felnőtt látogatója volt az állatkertnek, ha a gyerekek közül 2678 fiú és kétszer annyi lány váltott jegyet?

A kérdésre adandó választ az $9283 - (2618 + 2 \cdot 2618)$ művelet sor kiszámításával adhatjuk meg. Százasa kerekítéssel az ismeretlen becsült értéke: $9300 - (2600 + 2 \cdot 2600) = 9300 - 7900 = 1400$.

Megoldási terv készítése

A tudatos problémamegoldás mindig valamilyen megoldási terven alapul. Ennek elkészítése a szöveges feladatok esetében azt jelenti, hogy az eredeti problémát „átültetjük” valamilyen adekvát matematikai modellbe. Az adekvát jelző arra utal, hogy a megalkotott modell helyesen tükrözi az adatok és az ismeretlen (ismeretlenek) közötti összefüggést (összefüggéseket). Úgy is mondhatjuk, hogy a probléma eredeti (köznyelvi) és matematikai (kódolt) megfogalmazásának szinkrónban kell lenniük egymással.

Az alsó tagozaton használt legfontosabb modellek:

- számfeladat,
- számegyenes,
- táblázat,
- rajz,
- nyitott mondat,
- halmazábra,
- grafikon.

A számfeladat mint modell

Az alpműveletek bevezetéséhez egy bizonyos számkörre vonatkozó számfogalom kialakítása után kezdhetünk csak hozzá. Az összeadás és a kivonás esetében ez általában az 5-ös számkört, a szorzásnál és az osztásnál pedig a 100-as számkört jelenti.

A különböző tevékenységekről vagy képekről leolvasható, számszerűsíthető információk kapcsolatát számok és műveletek segítségével fogalmazzuk meg. Az összeszámláláshoz képest a számtannyelvű lejegyzés alapján történő kiszámítás lényeges továbblépést jelent. A számtannyelvű megfogalmazással (szóban vagy írásban) azt rögzítjük, hogy az adatoktól az ismeretlen meghatározásáig milyen művelettel juthatunk el közvetlenül.

A műveletek értelmezését segítő „Mit látsz a képen? Mesélj róla!” vagy „Mit csináltunk? Mondd el szóban!” típusú feladatoknál a gyerekek különböző történeteket fogalmazhatnak meg. Ezekből a történetekből emeljük ki a számfeladat felírása szempontjából lényeges információkat! Például egy hozzátevésees összeadást megfogalmazó történethez kapcsoljuk hozzá a „Mennyi volt? Mennyivel lett több? Mennyi lett?” kérdéseket!

Fontos, hogy a tanulók tisztában legyenek a műveletekre utaló kifejezések jelentésével, mert ennek segítségével ítélik meg, hogy a feladat éppen melyik művelettel modellezhető. Az árulkodó „Mennyi van összesen?”, „Mennyi maradt?”, „Mennyi jutott egy gyereknek?” kérdések például összeadásra, kivonásra, illetve osztásra orientálnak.

Kezdetben, a tanult új művelet alkalmazásakor a tanulók rajzot is készíthetnek a szöveges feladatokhoz. A rajzkészítés vagy egyéb tevékenység (eljátszás, kirakás) a megértésben és a számfeladat megfogalmazásában egyaránt segíthet:

8. példa

Ági 12 szál virágból 3 csokrot készített. Minden csokorba ugyanannyi virágot kötött. Hány szál virág került egy-egy csokorba? Rajzold le, majd írd róla számfeladatot!

Később már rajz nélkül is fel kell ismernie a gyerekeknek, hogy milyen művelettel számíthatják ki az ismeretlent:

9. példa

Másfél liter teát 5 pohárba öntöttek szét a napközisek. Minden pohárba ugyanannyit töltöttek. Hány dl tea került a poharakba?

További előrelépést jelentenek a több, általában két művelettel modellezhető szöveges feladatok. Ezeknél a feladatoknál célul tűzhetjük ki a két művelet összekapcsolását, az egyetlen műveletsorral történő lejegyzést és kiszámítást. Ennek természetesen előfeltétele a műveletvégzés sorrendjének ismerete. Egy példa:

10. példa

Szilvi a cukrászdában háromgombócos fagyit kért mézestölcsérbe. Mennyit fizetett, ha 1 gombóc fagyit 120 Ft-ba, a mézestölcsér pedig 30 Ft-ba került?

Megoldás

Természetesen nincs akadálya a lépésről lépésre történő „kijegyzetelésnek”, majd kiszámításnak:

1 gombóc ára: 120 Ft,

3 gombóc ára: $3 \cdot 120 \text{ Ft} = 360 \text{ Ft}$,

tölcsér ára: 30 Ft,

összesen: $360 \text{ Ft} + 30 \text{ Ft} = 390 \text{ Ft}$.

Az ilyen típusú feladatok kellő gyakoroltatása után (legalábbis a gyorsabb észjárású gyerekektől) elvárhatjuk a műveletsorral való lejegyzést:

$$3 \cdot 120 \text{ Ft} + 30 \text{ Ft} = 390 \text{ Ft}.$$

Lejegyzés az egyenes szövegezésű feladatoknál

A tankönyvek többsége a szöveges feladatok feldolgozásakor nem tesz különbséget az egyenes és a fordított szövegezésű feladatok között. Lejegyzési „mintának” a szövegezéstől függetlenül az alábbi hat lépés egymásutánját javasolják:

- adatok kigyűjtése,
- megoldási terv készítése,
- az ismeretlenek becslése,
- az ismeretlenek kiszámítása,
- ellenőrzés,
- válasz.

Ez a részletes, lépésenkénti lejegyzés ugyan látványos, mégis sokszor több kárral jár, mint haszonnal. Ennek érzékeltetésére lássunk egy 4. évfolyamnak szánt magyarázó példát:

11. példa

Attila egy 6820 Ft-os teniszütőt és 3 teniszlabdát vásárolt. Mennyit fizetett összesen, ha egy teniszlabda 270 Ft-ba került?

Adatok: $T = 6820 \text{ Ft}$, $L = 270 \text{ Ft}$ (3 db)

Terv: $F = 6820 \text{ Ft} + 3 \cdot 270 \text{ Ft}$

Becslés: $F \approx 6800 \text{ Ft} + 3 \cdot 300 \text{ Ft} = 7700 \text{ Ft}$

Számolás: Először a szorzást végezzük el, azután az összeadást.

A számegyenes mint modell

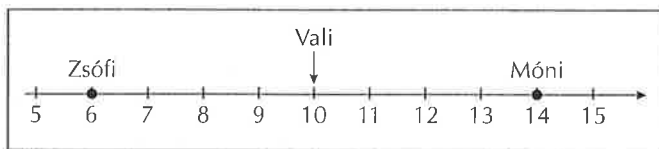
A számegyenes alsó tagozaton elsősorban a természetes számok modelljeként szolgál. A szöveges feladatban szereplő adatok helyét, egymáshoz és az ismeretlenhez viszonyított helyzetét szemléltethetjük rajta. Bizonyos esetekben a kérdés megválaszolásához műveletvégzésre nincs is feltétlenül szükség, mert egyszerűen leolvasható, hogy a számegyenes mely pontja felel meg az ismeretlennek. Egy példa:

13. példa

Zsófi, Vali és Móni testvérek. Zsófi 6 éves, Móni 14. Vali és Zsófi között ugyanannyi a korkülönbség, mint Móni és Vali között. Hány éves Vali?

Megoldás

Ábrázoljuk számegyenesen az ismert adatokat (2.32. ábra):



2.32. ábra

Az ábráról nemcsak a megoldás olvasható le könnyen, hanem az is, hogy 4 év a korkülönbség Vali és Zsófi, illetve Móni és Vali között.

A szemléltetés a művelettel történő kiszámításban is segít:

$$14 - 6 = 8 \rightarrow 8 : 2 = 4 \rightarrow 6 + 4 = 14 - 4 = 10.$$

Ugyanezt az okoskodást használhatjuk akkor is, amikor a számegyenesen való ábrázolásról nem olvasható le a megoldás, mert az adatok nagy távolságra (több száz vagy akár több ezer beosztásnyira) vannak egymástól.

A feladat 3. mondatát így is megfogalmazhattuk volna: Vali ugyanannyi évvel idősebb Zsófinál, mint ahány évvel fiatalabb Móninál.

A rajz mint modell

Segít a szöveges feladatok megértésében, megoldásában és/vagy ellenőrzésében, ha a bennük szereplő adatokat és ismeretleneket valamilyen geometriai alakzat mérőszámának (például szakasz hosszának, téglalap vagy kör területének) feleltetjük meg. Egy példa:

14. példa

Olgáék kikapartázták a két szobájukat. Az egyik szoba 6 m hosszú és 4 m széles, a másik szoba hosszúsága és szélessége is 5 m. Melyik szoba parkettázásához kellett több szegélylécet vásárolniuk?

Megjegyzés:

A tanulók a szobák méreteinek megfelelő téglalapok lerajzolása után egyszerű számításal igazolhatják, hogy a két szoba kerülete megegyezik, tehát ugyanannyi szegélyléc kellett a parkettázásukhoz.

A táblázat mint modell

A táblázatok nagyon jól használhatók például az ún. függvényre vezető szöveges feladatoknál (lásd 5.2.4. fejezet). Ezeknek az általában két ismeretlen (változót) tartalmazó feladatoknak több megoldása van, ha a változók között csak egy összefüggést ismerünk. Ilyenkor a táblázat a lehetőségek megadásában segít. Kezdetben nem várhatjuk el minden tanulótl az összes megoldás megtalálását. Lehetséges, hogy ezt több tanuló megkérdezésével gyűjthetjük csak össze. Ugyanakkor már 1. osztálytól kezdve felhívhatjuk a gyerekek figyelmét, hogy a rendszerezett felsorolás egyrészt jobban áttekinthető, másrészt minden lehetséges megoldást magában foglal. Segít a rendszerezésben, ha az első összetartozó számpárt (megoldást) előre beírjuk a táblázatba.

Ha a változók között két összefüggést is ismerünk, akkor ezeket az információkat egymás után vehetjük figyelembe. Az egyik összefüggést az összetartozó számpárok összegyűjtésére, a másikat pedig ezek közül a megfelelő számpár (vagy számpárok) kiválasztására használhatjuk.

15. példa

Egy osztály tanulói közül 14-en rendszeresen sportolnak.

a) Hány lány és hány fiú lehet a sportolók között? Írd a táblázatba!

Lány														
Fiú														

b) Hány lány és hány fiú van a sportolók között, ha a fiúk 2-vel kevesebben vannak? Keresd meg a táblázatban a megfelelő számpárt! Karikázással jelöld!

A nyitott mondat mint modell

A nyitott mondatral történő lejegyzést először a pótlásra vezető szöveges feladatok kapcsán magyarázhatjuk el:

16. példa

Az iskola udvarán 4 fiú beszélgetett, de néhány lány is csatlakozott hozzájuk. Így már 9-en beszélgettek tovább. Hány lány ment oda a fiúkhoz?

Megoldás

Ha megállapodunk abban, hogy a lányok számát például $\square$ -tel jelöljük, akkor a szövegösszefüggést számtannyelven háromféleképpen is megfogalmazhatjuk:

$$4 \xrightarrow{+ \square} 9 \quad \text{vagy} \quad 4 < \square < 9 \quad \text{vagy} \quad 4 + \square = 9$$

Megjegyzések:

- A történetet nem szerencsés eljátszani a nyitott mondat lejegyzése előtt, mert a megoldás tudatában már nehéz lekötni a tanulók figyelmét. Az eljátszást ebben az esetben ellenőrzésre használhatjuk.
- Gyakori hiba a tanításnál, hogy a nyitott mondat nem az eredeti szövegösszefüggést követi, hanem az ismeretlen kiszámítására vonatkozik. Ennél a feladatnál például nem a $\square = 9 - 4$ vagy a $9 - 4 = \square$ számfeladat modellezi a történetet. Az már egy következő fokozat, amikor – a műveletek közötti kapcsolatok ismeretére alapozva – a nyitott mondat ismeretlenjét ellentétes művelettel vagy műveletekkel számítjuk ki. (Mást jelent a szövegű nyitott mondat felírása, mint annak megoldása.)

A művelettanításokhoz kapcsolódóan folyamatosan dolgozzunk fel olyan szöveges feladatokat, amelyekhez tartozó nyitott mondatban az összeadandó, a kisebbítendő, a kivonandó, a szorzó, a szorzandó, az osztandó, illetve az osztó jelenti az ismeretlent (lásd 2.2.2. fejezet):

17. példa

Dani és testvérei összesen 8250 Ft zsebpénzt kapnak havonta. Minden gyerek 1650 Ft-ot kap. Hány testvére van Daninak?

Megoldás

A legtöbb esetben az ismeretlent arra vezetjük be, amit a szöveges feladat

kérdez. Ebben az esetben viszont ez nem vezetne eredményre, hiszen 1-gyel többen kapnak zsebpénzt, mint ahány testvére van Daninak. Ezért az ismeretlent a gyerekek számának jelölésére célszerű bevezetni. Ha ezt például y -nal jelöljük, akkor a feladatról a

$$8250 : y = 1650 \quad \text{vagy az} \quad y \cdot 1650 = 8250$$

nyitott mondatokat jegyezhetjük le. Megoldásukhoz a próbálgatás módszere gyorsan eredményre vezet:

$$5 \cdot 1650 = 8250, \text{ vagyis } 5 \text{ gyerek van a családban.}$$

Válaszolva az eredeti kérdésfelvetésre: Daninak $y - 1 = 4$ testvére van.

Nehezebbek azok a szöveges feladatok, amelyek két vagy több műveletet tartalmazó nyitott mondattal modellezhetők (lásd 2.2.3. fejezet):

18. példa

Egy zsömle 15 Ft-ba kerül. Hány zsömlét vásárolt Nelli, ha 200 forintossal fizetett és 65 forintot kapott vissza?

Megoldás

Ha a vásárolt zsömlék számát például z -vel jelöljük, akkor az eredeti szövegösszefüggés alapján a $200 - z \cdot 15 = 65$ nyitott mondatot jegyezhetjük le.

Természetesen a feladat megoldásához nyitott mondat nélkül, okoskodással is eljuthatunk. Először kivonással meghatározzuk, hogy mennyit fizetett Nelli, majd osztással azt, hogy hány db zsömlét vásárolt.

Annak sincs akadálya, hogy egy-egy feladatnál mindkét megoldási lehetőséget bemutassuk. A nyitott mondattal történő modellezésnek (a folytatásra is gondolva) azonban egyre nagyobb hangsúlyt kell kapnia.

A modellalkotás és az ítélőképesség fejlesztése szempontjából is hasznosak azok a feladatok, amelyekben a megfelelő nyitott mondatot kell kiválasztaniuk a tanulóknak egy adott szöveges feladathoz:

19. példa

Helga ezt mesélte Marcinak: 18 év múlva 3-szor annyi idős leszek, mint most. Hány éves Helga?

Marci nyitott mondat megoldásával tudta meg Helga életkorát. Melyik nyitott mondatot jegyezhetette le a három közül?

$$3 \cdot \square = 18 \quad \square + 18 = 3 \cdot \square \quad 3 \cdot (\square + 18) =$$

A több ismeretlent tartalmazó szöveges feladatok többségénél – a nyitott mondat felírásakor – nem feltétlenül szükséges minden ismeretlenre külön jelölést bevezetnünk. Elégedjünk meg csak egy ismeretlen alkalmazásával azoknál a feladatoknál, amelyeknél a többi ismeretlent könnyen kifejezhetjük a bevezetett ismeretlen segítségével:

20. példa

Egy osztály szülői értekezletén 4-szer annyi édesanya jelent meg, mint édesapa. 20-nál többen, de 30-nál kevesebben voltak. Hány édesanya és hány édesapa jelent meg a szülői értekezleten?

Megoldás

Ha az édesapák számát x -szel jelöljük, akkor az édesanyák száma: $4 \cdot x$.

Ez alapján a szövegösszefüggést két egyenlőtlenséggel:

$$20 < x + 4 \cdot x \text{ és } x + 4 \cdot x < 30$$

vagy egy egyenlőtlenségpárral:

$$20 < x + 4 \cdot x < 30$$

jegyezhetjük le, és tervszerű próbálgatással (lásd 2.2.2. fejezet) oldhatjuk meg.

Lejegyzés a fordított szövegezésű feladatoknál

A fordított szövegezésű feladatoknál az ismeretlent (általában a kérdésre adandó választ) betűvel vagy szimbólummal helyettesítjük. Nagyon fontos, hogy a bevezetett betű vagy szimbólum jelentése világos és egyértelmű legyen. Itt a pontos megjegyzéssel a tartalom kárára nem spórolhatunk.

Egyéb jelölésre (például az adatokra vonatkozóan) nincs szükség, további betűk használata felesleges, csak összezavarná a gyerekeket. Ha ragaszkodunk is az adatok kigyűjtéséhez (amennyiben ez egyáltalán lehetséges), akkor se használjunk betűket. Írjuk le, hogy a szövegben szereplő számok illetve mennyiségek mit jelentenek, de ne betűzzük meg őket!

Egy további példa a fordított szövegezésű feladatok lépésenkénti feldolgozásához:

21. példa

A 2. évfolyam tanulói egy négynapos, 63 km-es kerékpártúrán vettek részt. Hétfőn 18 km-t kerekaztek. Kedden, szerdán és csütörtökön ugyanakkora utat tettek meg. Hány km-t kerékpároztak ezeken a napokon?

Megoldás

Adatok

Összút: 63 km

Hétfőn: 18 km

Ismeretlen

□ : ekkora utat tettek meg kedden, szerdán és csütörtökön

Nyitott mondat

$$18 \text{ km} + 3 \cdot \square = 63 \text{ km}$$

A nyitott mondat megoldása (lebontogatással, 2 lépésben)

$$3 \cdot \square = 63 \text{ km} - 18 \text{ km}$$

$$3 \cdot \square = 45 \text{ km}$$

$$\square = 45 \text{ km} : 3$$

$$\square = 15 \text{ km}$$

Ellenőrzés

$$3 \cdot 15 \text{ km} = 45 \text{ km} \text{ és } 18 \text{ km} + 45 \text{ km} = 63 \text{ km}$$

Válasz

Kedden, szerdán és csütörtökön is 15 km-t kerékpároztak.

Megjegyzés:

Ha a szöveges feladatban mennyiségek szerepelnek, akkor a megoldás lejegyzésében következetesen fel kell tüntetnünk a mérőszámok mellett a mértékegységeket is. Ennek fontossága különösen akkor látszik, ha a megoldáshoz mértékváltásra is szükség van.

A grafikon mint modell

A 3–4. évfolyamon a tanulók megismerkednek az összetartozó adatpárok (például egy gépjáték bemeneti és kimeneti értékeinek) grafikonon történő ábrázolásával. A grafikonok használata (készítése és elemzése) az egyik fontos eszköz a függvényyszerű gondolkodás kialakításában.

Az elsősorban mozgással, vásárlással vagy méréssel kapcsolatos szöveges feladatoknál a grafikon a változók közötti kapcsolatok szemléltetésére és ezzel összefüggésben a megoldás leolvasására használhatjuk. A grafikon az összetartozó számpárok pontjainak összekötésével keletkezik, amely – alsó tagozaton – a legtöbb esetben egyenest határoz meg. Fontos, hogy a grafikonról leolvasott értékeket a tanulók számítással is ellenőrizni tudják.

Az ilyen típusú – tankönyvekben, feladatgyűjteményekben szereplő – feladatok egy része kész grafikonot kínál elemzésre:

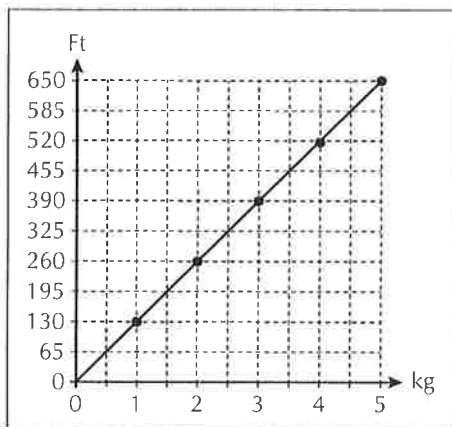
22. példa

1 kg alma 130 Ft-ba kerül. Olvasd le a grafikonról, hogy

a) mennyit fizetnél 3 kg almáért!

b) 585 Ft-ért hány kg almát tudnál vásárolni!

Számítással ellenőrizd válaszaidat! (2.33. ábra)



2.33. ábra

Időigényes és nehéz, ugyanakkor hasznos olyan komplex tevékenységre is bátorítani a tanulókat, amelyben a tengelyeket, azok skálázását, a grafikont és annak elemzését önállóan végzik el. A grafikon elkészítése előtt célszerű táblázatban megadni az összetartozó adatpárokat.

A halmazábra mint modell

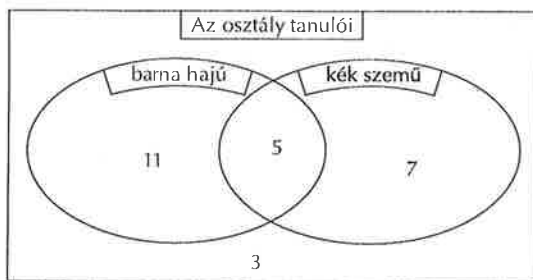
A halmazok elemszámával kapcsolatos feladatoknál a halmazábra nem az elemek elhelyezésére szolgál, hanem az egyes részhalmazok elemszámának beírására. Az ilyen feladatok tanítását egy kész ábra értelmezésével, a beírt számok jelentésének tisztázásával célszerű kezdeni. Egy példa:

23. példa

Egy osztály tanulóiról készítettük a rajzot (2.34. ábra). Olvasd le róla, hogy hány olyan tanuló jár az osztályba, aki

- a) barna hajú,
- b) nem barna hajú,
- c) kék szemű,
- d) nem kék szemű,
- e) barna hajú, de nem kék szemű,
- f) kék szemű, de nem barna hajú,
- g) barna hajú és kék szemű,
- h) se nem barna hajú, se nem kék szemű!

Hány tanuló jár ebbe az osztályba?



2.34. ábra

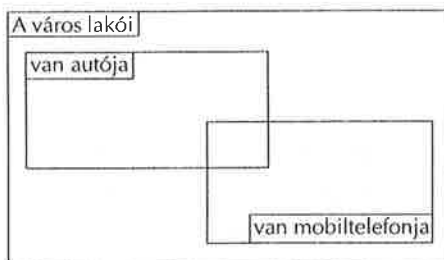
A következő lépést az olyan feladatok jelenthetik, amikor a tanulók kitöltetlen halmazábrát kapnak:

24. példa

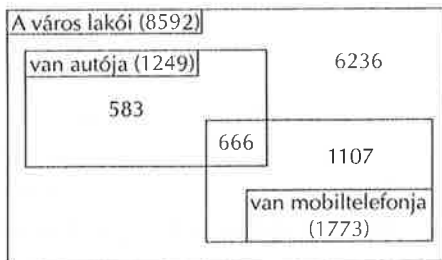
Egy városban 8592-en laknak. 1249 embernek van autója, 1773 embernek van mobiltelefonja. 666 embernek autója és mobiltelefonja is van. (2.35. ábra)

Ügyelve a kitöltés sorrendjére írd mind a négy részbe a megfelelő számot, majd válaszolj a kérdésekre! Hány olyan ember lakik a városban, akinek

- van autója, de nincs mobiltelefonja?
- van mobiltelefonja, de nincs autója?
- nincs sem autója, sem mobiltelefonja?



2.35. ábra



2.36. ábra

Megoldás

Az alaphalmaz és a két adott tulajdonságú részhalmaz számosságát a halmazcímkek után írhatjuk. A többi szám beírásánál arra kell felhívni a tanulók figyelmét, hogy az „bentről kifelé” történjen. A közös rész elemszámának beírása után számíthatják ki a kérdésekre adandó válaszokat. (2.36. ábra)

- Van autója, de nincs mobiltelefonja: $1249 - 666 = 583$ embernek.
- Van mobiltelefonja, de nincs autója: $1773 - 666 = 1107$ embernek.
- Nincs se autója, se mobiltelefonja: $8592 - (1249 + 1107) = 6236$ embernek.

Nehezebbek azok a problémák, amelyeknél a metszet elemszámának meghatározása a cél:

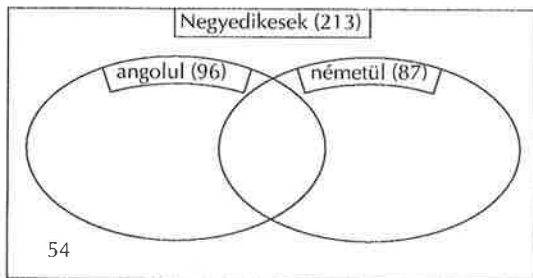
25. példa

Egy város összes általános iskolájának 213 negyedikesé közül 96-an angolul, 87-en németül tanulnak. 54 negyedikes nem tanul sem angolul, sem né-

metül. Hány olyan negyedikes tanuló van ebben a városban, aki angolul és németül is tanul?

Megoldás

A feladathoz készített halmazábra (2.37. ábra):



2.37. ábra

A kiszámítás lépései:

$213 - 54 = 159$ tanuló legalább az egyik idegen nyelvet tanulja. Ha az angolul és a németül tanulók számát összeadjuk, akkor $96 + 87 = 183$ -at kapunk.

A két szám (183 és 159) azért nem egyezik meg, mert a 183-ban kétszer is szerepelnek azok a tanulók, akik mindkét nyelvet tanulják.

Vagyis az angolul és németül is tanuló diákok számát a két szám különbsége adja: $183 - 159 = 24$.

Azt is megtudhatjuk, hogy $96 - 24 = 72$ -en csak angolul, $87 - 24 = 63$ -an csak németül tanulnak.

Végül a kapott számokat (24, 72, 63) a tanulók a megfelelő halmazrészbe írják.

Néhány olyan feladatról is gondoskodjunk, amelyeknél az ábrát is a gyerekeknek kell elkészíteni.

Több modell együttes alkalmazása

Nehezebb vagy összetettebb szöveges feladatok megoldási tervének elkészítésekor nem minden tanulóól várhatjuk el, hogy egyetlen modellbe sűrítve fogalmazza meg az adatok és az ismeretlenek kapcsolatát. Egyszerűbb és sokszor áttekinthetőbb is, ha az ismeretlenhez való eljutás tervét több lépésben adják meg. Ez jelentheti például számfeladatok egymásutánjának vagy nyitott mondatok rajz alapján történő felírását. Egy példa:

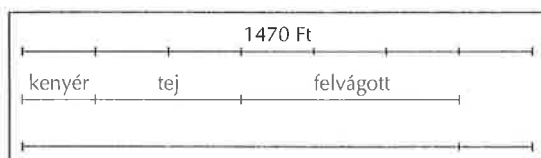
26. példa

Adrienn 1470 Ft-tal ment vásárolni. A pénzének 1 heted részéből kenyeret, 2 heted részéből tejet, 3 heted részéből felvágottat vásárolt. Hány forintja maradt a vásárlás után?

Megoldás

Jobb képességű (illetve megfelelő törtfogalommal rendelkező) tanulók azonnal felismerik, hogy a kérdés megválaszolásához nem fontos kiszámítani, hogy mire mennyit költött. Számukra a megoldási terv pusztán az 1470 Ft 1 heted részének kiszámítása ($1470 \text{ Ft} : 7$), hiszen a 6 hetedet (az elköltött pénzt) 1 heted egészíti ki az egészre (1470 Ft -ra).

Készíthetünk részletes, több lépésből álló megoldási tervet is, amennyiben a fenti, egyszerűbb megoldás problémát okoz a gyerekeknek. Rajz készítésével, számfeladatok felírásával és kiszámításával juthatunk eredményre (2.38. ábra):



2.38. ábra

kenyér: $1470 \text{ Ft} : 7 = 210 \text{ Ft}$
tej: $2 \cdot (1470 \text{ Ft} : 7) = 420 \text{ Ft}$
felvágott: $3 \cdot (1470 \text{ Ft} : 7) = 630 \text{ Ft}$
költött: 1260 Ft
maradt: $1470 \text{ Ft} - 1260 \text{ Ft} = 210 \text{ Ft}$

Megoldás, ellenőrzés, válaszadás

Alsó tagozaton a megoldási tervek végrehajtása természetesen nem vár el különösebb „megoldástechnikai” ismereteket a tanulóktól. Az ismeretlen meghatározásához a legtöbb esetben csak tájékozódásra (például táblázatnál, grafikonnál, rajznál, kirakásnál), illetve számolásra (például számfeladatnál, halmazábránál) van szükség. A különböző alakú nyitott mondatok megoldásának technikája viszont más és más (lásd 2.2.2. és 2.2.3. fejezet), a számoláson kívül egyéb megfontolásokat is igényelnek.

Fontos, hogy a megoldás ellenőrzése mindig a szövegbe helyettesítéssel történjen. A kapott eredménynek ugyanis nemcsak az alkalmazott matematikai modellt kell kielégítenie, hanem az eredeti szövegösszefüggést is.

Előfordulhat például, hogy egy hibásan felírt nyitott mondat ismeretlenjét a tanulók helyesen határozzák meg, de az eredeti problémának ez nem megoldása. Ilyenkor újra kell gondolni a megoldási tervet.

A kapott eredmény interpretálásához először is tisztázzuk, hogy valóban a feltett kérdésre kaptunk-e választ! Ezt követően a szövegben szereplő valamennyi feltételt és összefüggést ellenőriznünk kell. Egy példa:

27. példa

Árpi édesanyja 30 évnél idősebb, de 40 évnél fiatalabb. Ha a születési évének számjegyeit összeadjuk, akkor 22-t kapunk. Hány éves most Árpi édesanyja?

Megoldás

Tételezzük fel, hogy 2009-et írunk, és valamilyen megoldási tervet (például tervszerű próbálgatást) alkalmazva 34 évet kaptunk Árpi édesanyjának életkorára. Akkor az 1. mondatban szereplő feltétel teljesül, mert $30 < 34 < 40$. A 2. mondatban megfogalmazott összefüggés ellenőrzéséhez először ki kell számítanunk, hogy melyik évben született: $2009 - 34 = 1975$. A számjegyek összege: $1 + 9 + 7 + 5 = 22$, vagyis valóban helyes megoldást kaptunk.

Az ellenőrzéshez – amennyiben becslés is történt – hozzátartozik az ismeretlen becslült és számított értékének összehasonlítása. Ha a két érték túl nagy eltérést mutat, akkor a megoldási terv rossz, vagy pedig számolási hiba történt.

Csak az ellenőrzött és helyesnek talált megoldást követheti a válaszadás. Törekedjünk arra, hogy a tanulók rövid, lényegre törő, de pontos válaszokat adjanak. Az 1. évfolyamon (különösen az 1. félévben) megelégedhetünk a szóbeli válaszadással, de 2.-től kezdve a gyerekek írásban is válaszoljanak a feltett kérdésre.

Diszkusszió

A diszkusszió a szöveges feladat mélyebb elemzését, a felvetett probléma – megoldáson túlmutató – továbbgondolását jelenti. Megvizsgálhatjuk például, hogy a megadott információk birtokában még mit tudhatunk meg, illetve az adatok megváltoztatásával hogyan változna a megoldás:

28. példa

Egy gépkocsi üzemanyagtartályában 24 liter gázolaj van. A gépkocsi 6 litert fogyaszt 100 km-en. Kell-e tankolnunk, ha 350 km utat szeretnénk megtenni?

Két további felvethető kérdés:

- a) Mennyi gázolaj marad az üzemanyagtartályban az út megtétele után?
- b) Hány km-t tudnánk még megtenni tankolás nélkül?

Egy megoldhatatlan probléma esetén elgondolkodhatunk, hogy a feltételek megváltoztatásával vajon eredményre jutunk-e:

29. példa

Egy általános iskola létszáma 131. Lehetséges-e, hogy az alsó tagozatosok 20-szal többen vannak, mint a felső tagozatosok?

Megoldás

Ha a felső tagozatosok számát f -fel jelöljük, akkor a feladatot az $f + f + 20 = 131$ nyitott mondattal modellezhetjük. Ennek viszont nincs megoldása, mert a 111 nem osztható 2-vel. Ugyanakkor a nyitott mondat azt sugallja, hogy ha a 2. feltételhez ragaszkodunk, akkor az iskola létszáma csak páros (például 130, 132, ...) lehet.

Ha viszont az 1. feltételhez ragaszkodunk, akkor az alsó tagozatosok csak páratlan számmal (például 21-gyel) lehetnek többen a felső tagozatosoknál.

3. GEOMETRIA, MÉRÉSEK

Az általános iskola alsó tagozatán a geometria alapvető fogalmainak alapozása történik. A geometriai fogalmak fejlődése hosszú folyamat, az első négy évfolyamon nem zárul le. A fogalmak kialakításánál a gyerekek életkorának megfelelő tényleges cselekvésekből, tevékenységekből indulunk ki. A sokféle tevékenységből származó tapasztalatok összegyűjtése vezet el az általánosabb összefüggések felismeréséig, majd megfogalmazásáig.

A geometriai tevékenységek négy csoportba sorolhatók:

1. *Konstruálások* (építés, gyurmázás, kirakás, papírhajtogatás, nyírás, tépés, rajzolás), *válogatások* (halmazokba rendezések)

A konstruálások, válogatások a geometriai tulajdonságok megismerésére vezető tevékenységek. Fő célkitűzés a tanulók tér- és síkszemléletének fejlesztése, a geometriai alakzatok tulajdonságainak megismertetése.

2. *Transzformációk* (tükrözés, eltolás, elforgatás, nagyítás, kicsinyítés, torzítások) *végrehajtása*

A térbeli és síkbeli alakzatok változtatásával a gyerekek megfigyelhetik a formai és méretes tulajdonságok megmaradását, illetve változását.

3. *Tájékozódás térben, síkban, vonalon*

A tájékozódás mint a térszemlélet egyik komponense a térbeli helyzetek és kapcsolatok észlelésének, saját mozgásunk elképzelésének képességét jelenti. Mindezen képességek közös magja az irányfogalom. Ez a képesség hétköznapi szituációkban spontán módon is fejlődik, de a továbbfejlesztés és a tudatossá tétel az iskola feladata.

4. *Geometriai alakzatok mérhető tulajdonságai*

A geometriai alakzatok mérhető tulajdonságainak tanulmányozásával és mérésével kezdjük meg a terület, a terület, a felszín, a térfogat és a szög fogalmának kialakítását.

A geometriai gondolkodás fejlődése és így az ismeretszerzés folyamata egymásra épülő szinteken keresztül zajlik. Az ún. van Hiele-elmélet szerint ezek a következők:

1. szint: alakzatok globális megismerése,
2. szint: alakzatok elemzése,
3. szint: lokális logikai rendezés (informális dedukció),
4. szint: törekvés a teljes logikai felépítésre (formális dedukció),
5. szint: axiomatikus felépítés.

Az alakzatok globális megismerésének szintjén (1. szint) a gyermek a geometriai alakzatokat egységes egészként fogja fel. Nem képes elkülöníteni az alakzatok részeit (alkotóelemeit). Könnyen felismeri a különböző alakzatokat a formájuk alapján, megtanulja az alakzatok nevét (négyzet, téglalap, háromszög, négyszög, ötszög, kör, gömb, kocka, téglatest stb.), melyeket biztonsággal használ. Nem tudja azonban összehasonlítani a különböző alakzatokat. Nem ismeri fel a kockában a téglatestet, a négyzetben a téglalapot, illetőleg a rombuszt vagy a rombuszban a paralelogrammát, illetve a deltoidot, mert számára ezek egészen különböző dolgok.

Az alakzatok elemzésének szintjén (2. szint) a gyermek az alakzatokat részeire bontja, majd összerakja. Az alakzat és részei között kapcsolatokat fedez fel. Felismeri a mértani testek lapjait, éleit, csúcsait. A mértani testek lapjaiként a síkidomokat, amelyeket görbék, szakaszok, pontok határolnak. Megkezdődik a megismert alakzatok elemzése a megfigyelések, mérések, rajzolások, hajtogatások, nyírások, ragasztások, modellezések, parkettázások, tűkörhasználat révén. Ezen konkrét tevékenységek segítségével a tanuló megállapítja, felsorolja az alakzat tulajdonságait (lapok, élek, illetve oldalak, csúcsok száma; lapok alakja; élek, illetve oldalak hosszúsága; lapok, illetve oldalak párhuzamossága, merőlegessége; szimmetriatulajdonságok; van derékszöge stb.), de a tulajdonságok közötti logikai kapcsolatokat még nem ismeri fel. A tulajdonságok megállapítása csak az alakzatok megkülönböztetéséhez szükséges, így az egyes alakzatok definiálásának igénye nem merül fel. Az alakzatok megkülönböztetésével megindul az osztályba sorolás, de ezen a szinten a gyermek még nem veszi észre az alakzatok közötti hierarchikus kapcsolatokat. Megállapítja ugyan az alakzatok közös tulajdonságait, hogy például a négyzet és a téglalap is 4 csúccsal, 4 oldallal rendelkezik, szemközti oldalai párhuzamosok, szomszédos oldalai merőlegesek, minden szögük derékszög, de ebből nem következik számára az, hogy a négyzet téglalap is egyben. Vagy ehhez hasonlóan az sem, hogy a kocka téglatest, a téglalap paralelogramma stb.

Az alsó tagozaton az 1–2. szint megvalósítása reális. Az általános iskola felső tagozatán a 3. szint elérése lehet a cél. A 4. és 5. szinteknek megfelelő oktatás a középiskola és a felsőoktatás feladata.

A geometria témakörbe tartozó problémák megoldásához, a geometriai fogalmak alakításához, illetve geometriai tulajdonságok megfigyeltetéséhez folyamatosan alkalmazunk *halmazelméleti* és *logikai ismereteket*. A különböző szempontú válogatások során halmazokat hozunk létre, a halmazok elemeiről állításokat fogalmazhatunk meg, illetőleg adott halmazhoz kapcsolt állítások logikai értékéről dönthetünk.

A geometriai fogalmak tanításakor először térbeli alakzatok manipulatív vizsgálatából induljunk ki, hiszen a tér a tapasztalatszerzés természetesebb helyszíne, mint a sík.

A *mérés* során arra a kérdésre keressük a választ, hogy egy bizonyos mennyiség hányszorosa a mértékegységül választott mennyiségnek.

Ebben a témakörben a hosszúság, a tömeg, az űrtartalom és az idő méréseinek tanításával foglalkozunk. Targyaljuk továbbá az ún. méretes geometriai tulajdonságok (kerület, terület, felszín, térfogat, szög) fogalmát és mérést.

A mérés tanítás alsó tagozaton több célt is szolgál. Elsődlegesen a mindennapi életben való eligazodáshoz szükséges ismereteket, kompetenciákat fejlesztjük, de a mértékrendszer felépítését is elkezdjük. A hosszúság és a belőle származtatható kerület, terület, felszín, térfogat fogalmak a geometriai fogalmak elmélyítésének is az eszközei, csakúgy mint a szögfogalom. Az alapmennyiségek (hosszúság, tömeg, idő) bevezetése megalapozza a későbbi évek természettudományos tantárgyait (fizika, kémia) is.

Ez a témakör számtalan lehetőséget kínál a tantárgyak közötti koncentrációra, csakúgy mint a mindennapi élet szituációinak bevonására. A környezetismeret tantárgyban szintén megtalálható a Mérések fejezet. Ott elsősorban a tényleges gyakorlati feladatokra koncentrálni jelennek meg az egyes mennyiségek. Matematikaórán a konkrét mérési feladatok keretében a mennyiségek számszerű kifejezésére is hangsúlyt fektetünk. Emellett kézenfekvő lehetőségek adódnak testnevelésórán az időtartam (például futás ideje), a hosszúság (például távolugrás), a tömeg (súlyozás) méréseire. Énekórán az ütemezésen keresztül az időmérés, technikaórán a hosszúságmérés gyakorlati alkalmazására kerül sor. Anyanyelvórán pedig olvasmányaik alapján különböző régen használatos, mesékben előforduló alkalmi mértékegységeket ismernek meg a tanulók.

A geometria és a mérések tanítása rendkívül eszközigényes tevékenység. A tanító számára az eszközök használata nehezebb szervezési feladatot, több előkészületet jelent. A gyerekek eszközhasználatának, egyéni tárgyi tevékenységének elhagyása azonban megakadályozná a személyes tapasztalat-

szerzést, ami a megfelelő képzettartalmak kialakulásához szükséges. A megfelelő képzetrendszer viszont nélkülözhetetlen a matematikai problémák megoldásához, a fogalmak megértéséhez.

3.1. Testek

3.1.1. A testfogalom kialakítása

A testfogalom (zárt térrész) kialakítását a környezetünkben található tárgyak formái (alaki) tulajdonságainak vizsgálatával, illetve térbeli építésekkel kezdjük.

A térbeli építések sorrendje:

1. testekből testek építése;
2. síklapokból a testfelület előállítása;
3. élvázépítőkből az élek-csúcsok rendszerének megalkotása.

Végezzenek a gyerekek először építéseket *szabadon*, aztán modell alapján *másolásokat*, majd alkossanak különböző *feltételek szerint*: eleinte egy feltétel szerint egy-egy építményt, később többet, ezt követően több feltétel szerint minél több, végül az összes építményt. Építhetnek színes rudakból, Dienes-készletek elemeiből, gyufásdobozokból, legóelemekből, fa építőkockákból, amelyek között görbe felületűek is találhatók, gyurmából, tér- és síkmértani modellezőkészlet lapjaiból, Babylon-készlet elemeiből, szívószálakból stb. A testek alkotása során hívjuk fel a gyerekek figyelmét a testek térbeli zártására. Például egy téglalatest alakú cipősdoboz csak a fedelével együtt tekinthető testnek. Ha levesszük a doboz fedelét, akkor egy nyitott térbeli alakzathoz jutunk.

A *modell* – amelyhez általában egyfajta elemeket használunk – *másolása* történhet úgy, hogy a gyerekek

- az *eredetivel egybevágó, azaz ugyanolyan alakú és méretű testet* hoznak létre.
- a *modell kisebb vagy nagyobb mását* építik meg. Például ha a tanító modellje a 3-as Dienes-készlet nagykockáiból készült, akkor a tanulók másolják ezt le fehér kiskockákból. Ezzel a hasonlóság szemléletes alapozását kezdjük el.
- *fénykép vagy perspektív rajz alapján* építenek, ami mellé az alaprajzot is megadhatjuk, ha a fénykép vagy a perspektivikus rajz önmagában nem elegendő az építés egyértelmű végrehajtásához (amennyiben a

többféle megoldás elkészítése a célunk, ne adjuk meg az alaprajzot). Az alaprajzon feltüntetett számok azt mutatják meg, hogy az adott helyen milyen magas az építmény, hány elem van egymás fölött. Az alaprajzba írt számok összege a felhasznált rudak számát adja, és egyforma építőelemek esetén egyben a térfogat mérőszámát.

1. példa

Építsd fel fehér kiskockákból! (3.1. ábra)

- csak *alaprajz alapján* építenek. Az alaprajzok ismeretében egyértelműen elkészíthetők az építmények.

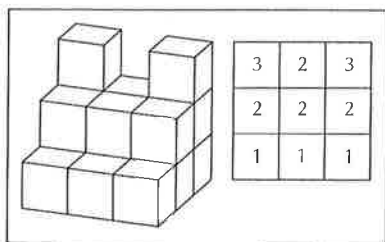
2. példa

Építsd fel az alaprajz alapján csupa rózsaszínű rudakból! (3.2. ábra)

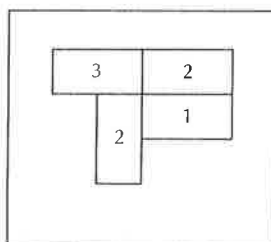
Ugyanarról az építményről készülhetnek különböző alaprajzok, ha más-más lapján áll.

3. példa

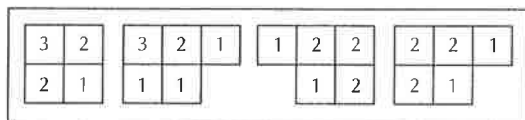
Építsd meg fehér kiskockákból mindegyiket! Kösd össze azokat az alaprajzokat, amelyek készülhettek ugyanarról az építményről! (3.3. ábra)



3.1. ábra



3.2. ábra



3.3. ábra

Megjegyzés:

Egy építményt elforgatva vagy másik lapjára állítva a tanulók eldönthetik, hogy ugyanarról az építményről készült-e az alaprajz.

Az építésekhez *adott feltételek* vonatkozhatnak:

- az építőelemek számára, fajtájára: például 4 világoskék rúdból építenek lényegesen különböző testeket;
- az építmény magasságára: például a piros rúdnál ne legyen magasabb;
- arra, hogy az építmény lyukas vagy tömör legyen;
- az építmény felületére (van görbe felületrésze, vagy csupa síklap határolja);
- az építmény alapterületére;
- az építmény tükrösségére;
- az építmény konvexitására: legyen vagy ne legyen rajta bemélyedés;
- a határoló lapok számára, alakjára, helyzetére stb.

Ezekből a feltételekből egy-egy építéshez egyszerre csak egy, esetleg két feltételt adunk meg.

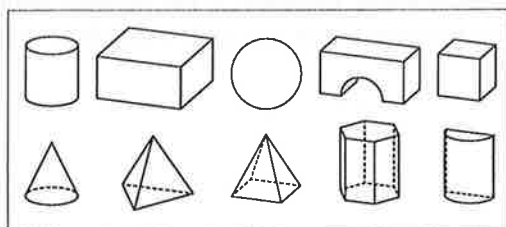
3.1.2. A síklapú test fogalmának kialakítása. Testhálók

A szabad építések, a modellek másolása során a gyerekek geometriai tapasztalatokat szereznek a testekről. A testek (tárgyak) különböző szempontú válogatásánál ezekre a tapasztalatokra építünk. A síklapú test (poliéder) fogalmát a testeket határoló felületek vizsgálatával készítjük elő. A fogalom bevezetéséhez a tanító a testeket (tárgyakat) aszerint válogatgatja a gyerekekkel, hogy csupa síklap határolja-e vagy sem, azaz van-e görbe felületrésze. Vizsgálják meg a tanulók a környezetükben, az osztályteremben található tárgyakat: például szekrényeket, gyufásdobozokat, gyógyszeres üvegeket, befőttesüvegeket, vadgesztenyét, labdákat, építőkockákat, kavicsokat stb., továbbá testmodelleket: kockákat, téglatesteket, különböző hasábokat, gúlákat, hengereket, kúpokat, gömböket.

1. példa

Válogassátok ki az itt látható testek (3.4. ábra) közül azokat,

- amelyeket csupa síklap határol;
- amelynek van görbe felületrésze;
- amelyeket nem csak síklap határol;
- amelyeknek csak görbe felülete van!



3.4. ábra

Fontos, hogy kezdetben ezek a válogatások konkrét tárgyi tevékenységgel történjenek. A gyerekek vegyék a kezükbe ezeket a testeket, tenyerükkel kövessék, érzékeljék a különbséget a sík és a görbe felületek között. Figyeljék meg, hogy a példában szereplő csupa síklappal határolt testeknek – a téglatestnek, kockának, tetraédernek, négyzet alapú gúlának és a hatszög alapú hasábnak – a lapjai az asztallapra illeszkednek, azokat körül lehet rajzolni. Figyeljék meg azt is, hogy a henger, a kúp, a „félbevágott” henger csak a síklapjukra helyezve állnak stabilan az asztalon.

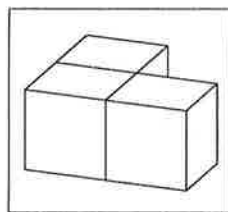
A fogalomépítéshez hozzátartozik a fogalom megnevezése, szavakba öntése. Alsó tagozaton ezek a megnevezések nem szükségszerűen azonnal a legpontosabbak, a legszakszerűbbek. Arra azonban ügyelnünk kell, hogy olyan megnevezést használjunk, ami a későbbiekben nem vezet ellentmondáshoz, félreértéshez. A példában bemutatott válogatásokhoz hasonló csoportosítások során nevezzük el a csupa síklappal határolt testeket közös néven síklapú vagy szögletes testeknek! Nem használjuk az első négy évfolyamon a poliéder kifejezést.

Mutassuk meg egy síklapú test lapjait, éleit és csúcsait!

2. példa

Rakj ki 3 fehér kiskockát így! (3.5. ábra)

- Mutasd meg és sorold fel a keletkezett test határoló lapjait! Tarts rendet a felsorolásban!
- Két lap találkozásánál húzd végig az ujjad! Érezheted, hogy milyen éles, ezért is nevezzük élnek. Mutasd meg és sorold fel rendben az éleket!
- Számláljuk meg, hogy hány csúcsa van az építménynek!



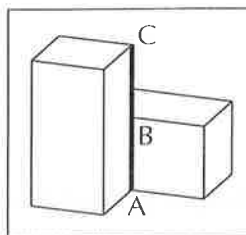
3.5. ábra

Megoldás

- A felsorolást kezdetjük például azzal a lappal (körül is rajzolhatják), amelyik az asztallapra illeszkedik. Ez egy L alakú lap, a vele szemben lévő lap felül is ilyen. Elöl egy téglalap látszik, hátul két négyzetlap, az egyik közelebb, a másik távolabb. A bal oldalon szintén egy téglalap, a jobb oldalon két négyzetlap, az egyik közelebb, a másik távolabb. Ez összesen 8 lap.
- Az alaplapon 6 él van, a fedőlapon szintén 6, az oldallapok találkozásainál is 6 él. Ez összesen 18 él.
- Alul és felül is 6-6, ez összesen 12 csúcs.

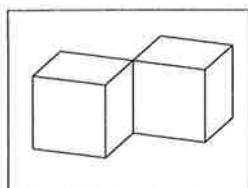
Az él fogalmát pontosíthatjuk, mélyíthetjük, ha olyan építményekkel is találkozunk a tanulók, amelyekben két él egy egyenesbe esik. (3.6. ábra)

A vastagon rajzolt szakasz két élt (AB és BC) jelöl, mert azok nem ugyanannak a két lapnak a határán vannak.



3.6. ábra

4. évfolyamon keressék meg a gyerekek az összefüggést konvex poliéderek (például kocka, téglatest, gúla stb.) esetén a csúcsok, lapok és élek száma között: csúcsok száma + lapok száma – élek száma = 2 (*Euler-féle poliédertétel*). A felfedezett összefüggésről a gyerekeknek nem kell tudniuk, hogy ez csak a testek egy jól meghatározott csoportjára, a konvex poliéderekre igaz. Elegendő néhány jól megválasztott ellenpéldával nyilvánvalóvá tenni a számukra, hogy vannak olyan testek, amelyekre ez nem teljesül (3.7. ábra):



3.7. ábra

csúcsok száma: 14

lapok száma: 12

élek száma: 23

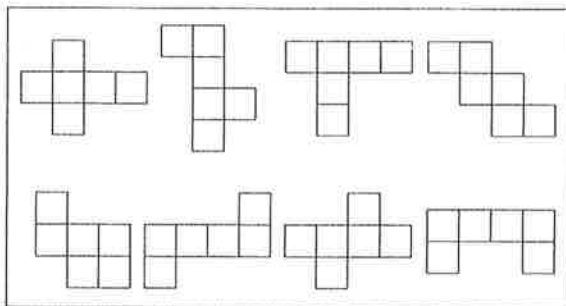
$14 + 12 - 23 \neq 2$

A papírlapból, a sík- és térmértani modellezőkészletből készített kockát, téglatestet, tetraédert, háromszög alapú hasábot, gúlát stb. vágják fel, illetve nyissák szét a gyerekek annyi élük mentén, hogy a lapok egyben maradjanak, ne essenek szét két- vagy többfelé, de ki tudják teríteni őket a síkba. Végezzenek több kísérletet a tanulók, figyeljék meg, hogy melyik testnél hány élt kellett felválni, illetve szétnyitni. A tetraéder, a háromszög alapú gúla kiterítéséhez 1, illetve 2 él felvágása, szétnyitása nem elég, 3 él felvágása, szétnyitása azonban szükséges és elegendő is. Próbálkozásaik során tapasztalhatják, hogy 4 él menti szétvágással, szétnyitással már két darabra esik szét a tetraéder. Azt is bemutatjuk, hogy nem mindegy, hogy melyik három élt választjuk ki. Ha a kiválasztott 3 él egy síklapon van, akkor a test nem teríthető ki. A kocka, téglatest kiterítéséhez 7 élt kell felválniuk, szétnyitniuk. Ezek a kiterítések vezetnek el a gyerekeket a testhálókhoz. A tanulók további feladata legyen az, hogy a testeket többféleképpen terítsék ki. Ellenőrzésként a testhálóból összehajtogatással, összeragasztással újra létrehozzák, visszaállítják az eredeti testeket. Érdekesek és a térszemlélet fejlesztésére kü-

lönösen alkalmasak azok a feladatok, amelyekben különböző rajzokról kell eldönteniük, hogy lehetnek-e egy kockának, egy téglatestnek, egy négyzet alapú gúlának (piramisnak) vagy bármilyen testnek testhálói.

3. példa

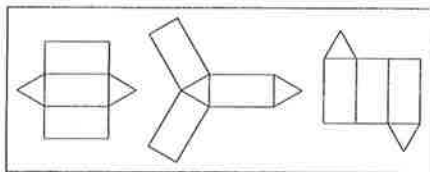
Melyik hálóból lehet kockát összeállítani, melyikből nem? Próbáld is ki! (3.8. ábra)



3.8. ábra

4. példa

Próbáld a rajz alapján megállapítani, hogy az alábbi hálóból lehet-e testet hajtogatni! Négyzethálón nagyítsd a rajzokat a kétszeresükre, majd vágd ki, és hajtogatással ellenőrizd az elgondolásodat! (3.9. ábra)



3.9. ábra

Megjegyzés:

A gyerekeknek fel kell ismerniük az egymáshoz csatlakozó oldalakat és azt, hogy a csatlakozó lapok oldalainak hossza megegyezik.

Adhatunk olyan feladatot is, amelyben a kocka, valamint a téglatest különböző hálói az egymással párhuzamos lapokat kell azonos színnel kiszínezni vagy egy adott lapra merőleges lapokat megjelölni. További feladat lehet a kocka, illetőleg a téglatest hálóján megadott éllel párhuzamos, illetve merőleges élek színezése.

3.1.3. Testek tulajdonságai, jellemzése. Nézeti képek

A testek (tárgyak) különböző szempontú szétválogatásával a geometriai tulajdonságokra irányítjuk a figyelmet.

A gyerekek válogathatnak *saját szempont szerint*, ekkor az ő feladatuk, hogy saját szavaikkal megfogalmazzák az egy csoportba válogatott testek (tárgyak) közös, a többi testtől (tárgytól) eltérő tulajdonságát. Kezdetben engedjük használni a gyerekeknek saját megfogalmazásaikat, ha valóban megfelel a közös tulajdonság jelölésére. A tanítónak akkor érdemes a pontosabb, szakszerűbb kifejezést bevezetni, ha az a fogalom megnevezését szolgálja. A fogalom megnevezése előtt a fogalmat tartalommal töltjük meg.

Válogathatnak a tanulók a tanító által *adott szempont szerint* is. Ha azonban a tanító – megnevezés nélkül – akar egy-egy tulajdonságot középpontba állítani (a geometriai fogalmat tartalommal megtölteni), akkor kezdje el a válogatást, a gyerekek feladata pedig a *megkezdett válogatás folytatása*. Az egy csoportba sorolt testek (tárgyak) közös, a többi testtől (tárgytól) eltérő tulajdonsága lesz a kialakítandó új fogalom tartalma.

Lehet a gyerekek feladata *elrontott válogatás javítása* is. Megadhatjuk az egy csoportba válogatott testek (tárgyak) közös tulajdonságát, de az is lehetséges, hogy a válogatáshoz nem adjuk meg, hogy mihez képest javítsanak (lásd 2.1.5. fejezet).

A tanulók csoportosíthatnak aszerint, hogy

- a testet csupa síklap határolja, vagy van görbe felületrésze: szögletes vagy nem síklapú test (lásd 3.1.2. fejezet);
- a test lyukas (például kulcs) vagy nem lyukas;
- a testen van bemélyedés vagy nincs (konkáv vagy konvex a test);
- a test tömör (például lila rúd) vagy üreges (például labda);
- a test tükrös vagy nem tükrös;
- a testnek 1 tükörsíkja van vagy több is;
- a síklapú testnek hány határoló lapja van;
- a síklapú testnek milyen alakúak a határoló lapjai;
- a síklapú testnek vannak egybevágó lapjai vagy nincsenek;
- a síklapú testnek hány egybevágó lapja van;
- a síklapú testnek vannak párhuzamos lapjai vagy nincsenek;
- a síklapú testnek vannak merőleges lapjai vagy nincsenek;
- a síklapú testnek hány éle van;
- a síklapú testnek hány azonos hosszúságú éle van;

- a síklapú testnek vannak párhuzamos élei vagy nincsenek;
- a síklapú testnek vannak merőleges élei vagy nincsenek.

A test *konvexitásával* kapcsolatban azt figyelgetjük meg a bemutatott testeken, hogy van-e rajtuk bemélyedés, „beugrás” (*nem konvex, konkáv*) vagy nincs (*konvex*), illetve el lehet-e „bújni” bennük (*nem konvex*) vagy nem (*konvex*). Síklapú testek (poliéderek) esetén azt is megmutatjuk, hogy a konvex poliédert síklapra fektetve annak minden lapját körül tudjuk rajzolni (kocka, téglatest, tetraéder, négyzet alapú gúla stb.).

Síklapú testeken figyeltesse meg és – konvex esetben – rajzoltassuk is körül a testeket *határoló lapokat*. Nézzük meg, hogy *hányféle* és *milyen alakú* lap határolja, továbbá közülük hány lap ugyanolyan alakú és ugyanakkora (*egybevágó*). Vizsgáljuk meg a kockánál, téglatestnél, gúlánál, hasáboknál az *egybevágó lapok elhelyezkedését*. Figyeljék meg a gyerekek, hogy a különböző síklapú testeknél egy-egy csúcsban hány lap található (minden csúcsnál ugyanannyi vagy nem). Például a tetraéder mindegyik csúcsában 3 lap található, a négyzet alapú gúla (piramis) alaplapján lévő csúcsaiban 3 lap, az alaplapra nem illeszkedő csúcsában 4 lap található.

A téglatest, kocka szemközti, illetve szomszédos lapjai helyzetének vizsgálata során vezethetjük be új fogalomként a *párhuzamosságot* és a *merőlegességet*. Téglatestmodellként használhatunk például gyufásdobozt. A gyufásdobozon kijelölünk két szemközti lapot és kerestetjük a lapok közös élet. A szemközti lapoknak nincs közös élük. Ha a lapokat akármekkora megnagyobbítanánk, akkor se lenne, a szemközti lapok párhuzamosak. Mindhárom szemközti lappár párhuzamosságát figyeltesse meg.

A gyerekek két kezükkel is mutassák többféleképpen a párhuzamosságot, a nem párhuzamosságot.

Az osztályteremben kerestessünk olyan tárgyakat, amelyeknek vannak párhuzamos lapjai, mutassák is meg ezeket.

A téglatesten kijelölünk két szomszédos lapot, és vizsgáljuk a lapok hajlásszögét. Ezek hajlásszöge derékszög, úgy is mondhatjuk, hogy ezek a lapok merőlegesek egymásra. Hajtogatott derékszöggel ellenőrizzük a szög nagyságát. Vegyünk egy fedőlap nélküli téglatestet, és tegyük a hajtogatott derékszög csúcsát a két lap közös élére. Ekkor a derékszög egyik szára az egyik lapon, a másik a vele szomszédos lapon lesz (mindkét szár merőleges a közös élre), tehát a vizsgált szomszédos lapok merőlegesek egymásra. Bármilyen alakú papírlapból úgy tudunk derékszöget hajtogatni, hogy tet-szöleges helyen összehajtjuk a papírlapot, majd újra összehajtjuk úgy, hogy

az első hajtásél két darabja egymásra kerüljön. Alsó tagozaton a szögmérés egyetlen eszköze a hajtogatott derékszög (lásd 3.7.5. fejezet).

A gyerekek mutassák két kezükkel, illetve a tankönyv két lapja között a merőlegességet. Kérhetjük annak bemutatását is, amikor a tankönyv két lapja nem merőleges.

Az osztályteremben keressünk olyan lapokat, amelyek merőlegesek egymásra. Keressünk olyanokat is, amelyek nem merőlegesek és nem párhuzamosak, azaz olyan metsző lapokat, amelyek nem merőlegesek egymásra.

1. példa

- a) Keressetek ezen a testen (szabályos háromszög alapú hasábon) párhuzamos lapokat! Mutassátok meg!
- b) Keressetek merőleges lapokat! Mutassátok meg!
- c) Keressetek olyan lapokat, amelyek nem párhuzamosak és nem merőlegesek egymásra!

Megoldás

- a) A két háromszög alakú lap.
- b) Több lehetőség: a háromszög alakú alaplapon és az oldallapon egyike.
- c) Bármelyik két oldallap. Például két szomszédos oldallap nem párhuzamos, mert összeérnek, van közös élük. Derékszögnél nagyobb szöget zárnak be, ezért nem merőlegesek.

Megjegyzés:

A merőlegesség bemutatásához vegyünk egy fedőlap nélküli modellt és egy hajtogatott derékszöget. A hajtogatott derékszög csúcsát helyezzük az alaplapon és az oldallap közös élére, ekkor a derékszög szárai az alaplapon és az oldallapon illeszkednek. Ezzel belátjuk, hogy az alaplapon és az oldallapon merőlegesek egymásra.

Síklapú testek (poliéderek) esetén vizsgáljuk meg az *élek helyzetét* is. Modelleken szemléltessük a konvex és nem konvex poliéderek éleinek lehetséges helyzetét. Az él *metszők*, ha egy csúcsban találkoznak, vagy az él meghosszabbításai metszik egymást. Az utóbbi esetben hurkapálcikákat vehetünk segítségül a szemléltetéshez. Ha a metsző él derékszöget zárnak be, akkor *merőlegesek* egymásra. Ennek ellenőrzése hajtogatott derékszöggel történik. A nem metsző él *párhuzamosak* vagy *kitérők*. Párhuzamos él esetén érzékeljük a tanulók, hogy azok egy síkban vannak, és az él

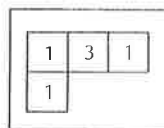
meghosszabbításai nem „találkoznak”, kitérő élek esetén annyit, hogy az élek nincsenek egy síkban.

Az alsó tagozat végéhez közeledve a tanulók a megismert geometriai tulajdonságok segítségével egyre pontosabb jellemzést tudnak adni a különböző testekről.

A térszemlélet, az irányfogalom, a tájékozódási képesség fejlesztését szolgálják az alaprajzra, illetőleg nézeti képek alapján történő építések, valamint a testek nézeti képeinek elkészítése. A nézeti képek azt mutatják meg, hogy hogyan néz ki egy test előlről, felülről és oldalról (jobbról és balról).

2. példa

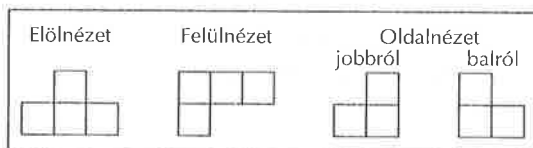
Építsd meg a testet fehér kiskockákból az alaprajz alapján! Készítsd el az elől-, felül- és oldalnézeti (jobb és bal) képeket! (3.10. ábra)



3.10. ábra

3. példa

Építsd meg a testet fehér kiskockákból a nézeti képek alapján! (3.11. ábra)



3.11. ábra

Megjegyzés:

A feladatot nehezíthetjük azzal, ha más színű, illetve többféle színű rudakat is használunk.

3.1.4. Speciális testek. A kocka és a téglatest

A testek közül kiemelten foglalkozunk a kockával és a téglatesttel. A gyerekek már az óvodában képesek felismerni formájuk alapján a kockát és a téglatestet. Megtanulják a két alakzat nevét, amelyet az 1–2. évfolyamon már biztonsággal használnak. Ez a geometriai gondolkodás fejlődésében az alakzatok globális megismerésének szintje.

Ezt követően a 3–4. évfolyamon az alakzatok elemzésének szintjén a tanulók a kockát és a téglatestet részeire bontják, kiterítik, majd összerakják. Az alakzatok és részeik között kapcsolatot fedeznek fel. Meghatározzák a kocka, illetőleg a téglatest lapjainak, éleinek, csúcsainak számát, a lapok alakját.

A lapok alakjáról a testek körülrajzolásával győződhetnek meg. Felismerik az egybevágó lapokat. Megállapítják, hogy a kockát csupa ugyanolyan alakú és ugyanakkora (egybevágó) négyzetlapok határolják. A téglatest szemben fekvő lapjai páronként egybevágó téglalapok. Összehasonlítják az élek hosszúságát. Megfigyelik mindkét alakzatnál a szemközti lapok párhuzamosságát, a szomszédos lapok merőlegességét. Megfigyelnek párhuzamos, merőleges és kitérő helyzetű éleket. Konkrét tevékenységek segítségével a kocka és a téglatest említett tulajdonságait megállapítják és felsorolják, de a tulajdonságok közötti logikai kapcsolatot még nem ismerik fel ezen a szinten. A kocka és a téglatest tulajdonságainak összehasonlítására célszerű tulajdonságkártyákat készíttetni a gyerekekkel. Például „6 lapja van.”, „Vannak párhuzamos élei.”, „Csak négyzetlapok határolják.”.

Az *alakzatok elemzésének szintjén* álló tanulók megállapítják a kocka és a téglatest közös tulajdonságait, de ebből nem következik számukra, hogy a kocka téglatest is egyben. Ezen a szinten az alakzatok közötti kapcsolatokat, tartalmazási relációkat még nem veszik észre. Ez persze nem jelenti azt, hogy a tanító ne próbáljon meg feltenni a következő gondolkodási szintnek, a *lokális rendezés szintjének* megfelelő kérdéseket a fogalmak közötti tartalmazási relációkra vonatkozóan. Próbálkozhat például azzal, hogy a kockát egy különleges téglatestként nevezi meg, de a próbálkozások nagy valószínűséggel az alsó tagozatos tanulók döntő többsége számára hiábavalónak mutatkoznak. A különböző alakzatok közötti összefüggések meglátására azok a tanulók képesek, akiknek a geometriai gondolkodása az *alakzatok elemzésének szintjénél* magasabb szinten áll. Ekkor egy alakzat felfogása egy másik alakzat speciális eseteként már nem okoz problémát. A *lokális rendezés szintjén* a kocka már téglatest. Erre a szintre azonban a tanulók nagy része csak felső tagozatos korában jut el.

A speciális testek közé soroljuk a *szabályos testeket* (*tetraédert, hexaédert vagy kockát, oktaédert, dodekaédert, ikozaédert*), azokat a konvex poliédereket, amelyeknek élei, élszögei és lapszögei egyenlők. A szabályos testek lapjai egybevágó szabályos sokszögek. Figyeltessük meg a gyerekekkel a szabályos testmodelleken a lapok alakját, egybevágóságát, az élek egyenlőségét! Szabályos testeket építtethetünk a gyerekekkel csupa egybevágó szabályos háromszöglapokból, négyzetlapokból, ötszöglapokból.

1. példa

Építsetek testet 4, illetve 8 ugyanolyan alakú és ugyanakkora háromszöglapból, amelynek oldalai egyenlők! Lehet-e 3, 5 vagy 6 ilyen lapból testet építeni? Próbáljátok ki!

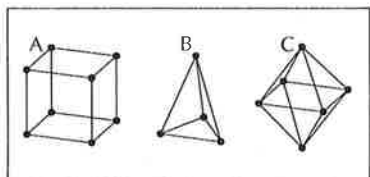
2. példa

Építsetek 6 négyzetlapból testet! Milyen testet kaptatok?

Szabályos testek élvázát gyurmagolyókba szúrt egyenlő hosszúságú pálcikákkal, vagy valamilyen élvázás építőjáték felhasználásával készíthetjük el. A Babylon-készlet golyóiból és egyenlő hosszúságú pálcikaiból kétféle szabályos testet építhetünk meg: kockát és oktaédert (kettős piramist).

3. példa

Építsétek meg a képen látható testeket gyurmagolyókba szúrt egyenlő hosszúságú pálcikákkal! Töltsétek ki a táblázatot a megépített testek tanulmányozásával! (3.12. ábra)



3.12. ábra

	A	B	C
Csúcsok száma			
Élek száma			
1 lap oldalszáma			
Lapok száma			

Megjegyzés:

A testfogalom megfelelő fejlettségét igényli ez a 4. évfolyamnak szánt feladat, mert az élvázás modellhez oda kell képzelni a test lapjait.

3.2. Síkidomok

3.2.1. A síkidom fogalmának kialakítása

A környezet tárgyainak formáját vizsgálva nemcsak a testfogalom, hanem a síkidom (zárt síkrész) fogalmának kialakítása is indul. A fogalom alakításában nagy szerepe van a síkbeli alkotásoknak.

A síkbeli alkotások sorrendje:

1. síkidomokból újabb síkidomok, minták készítése; síkbeli alakzatok létrehozása festéssel;
2. síkidomok határvonalainak alkotása pálcikákkal, szívószálak összefűzésével, gumikarika kifeszítésével, rajzzal (szabad kézzel, sablonnal, vonalzóval, körzővel).

Alkossanak a gyerekek kezdetben *szabadon*, aztán végezzenek *másolókat*, majd alkossanak különböző *feltételek szerint*: eleinte egy feltétel szerint egy-egy síkbeli alkotást, később többet, ezt követően több feltétel szerint hozzanak létre minél több, végül minden lehetőséget. Síkidomokat alkothatnak kirakással kézbe vehető síkidomokból, mozaiklapokból, a tér- és síkmértani modellezőkészlet lapjaiból, a logikai készlet lapjaiból; papírból hajtogatással, tépéssel, nyírással; festéssel; szöges-lyukas táblán gumigyűrűk kifeszítésével; szívószálak összefűzésével; szabad kézzel történő rajzolással, sablonok körberajzolásával, vonalzó, körző használatával.

Legyen a gyerekek feladata síkbeli nyitott és zárt vonalak megkülönböztetése. Hangsúlyozzuk, hogy a zárt vonal által határolt zárt síkrészt tekintjük síkidomnak.

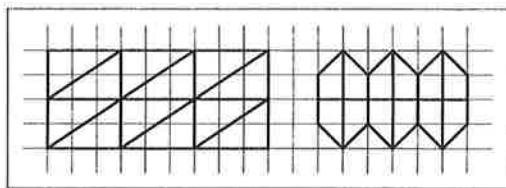
Szabad kirakások során a kézbe vett síkidomokkal ismerkednek a gyerekek, ezáltal egyre könnyebben felismerik formájuk alapján a különböző alakzatokat különféle helyzetükben. A tanulók szabadon hajtogathatnak papírból, ollóval nyírhatnak, téphetnek különböző formákat, rajzolhatnak szabad kézzel, vonalzóval, körzővel, előállíthatnak sablonok körülrajzolásával sokféle alakzatot.

Minta utáni másolásoknál kezdetben célszerű olyan kivágott vagy előre rajzolt formákat a gyerekek elé tenni, amelyeket pontosan be tudnak fedni síkidomokkal. Ügyeljünk arra, hogy eleinte néhány (3-6) elemmel kirakható formákat adjunk, majd fokozatosan növelhetjük a kirakáshoz szükséges elemek számát. Síkidomokból alkothatnak a gyerekek *sormintát*, *síkmintát* szabadon, vagy folytathatnak elkezdett mintát. Egymással egybevágó síkidomok kirakosgatásával parkettamintákat készíthetünk. A *parkettázás* a sík síkidomokkal történő egyrétű és hézagmentes lefedését jelenti. Parkettázással a lapok illeszthetőségéről szereznek tapasztalatot a tanulók. Adjunk a gyerekek kezébe olyan síkidomokat, amelyekkel tudnak parkettázni (bármilyen háromszöglappal, bármilyen négyszöglappal, középpontosan szimmetrikus hatszöglapokkal, bizonyos ötszöglapokkal, bizonyos görbe vonalú lapokkal stb.), és olyanokat is, amelyekkel nem sikerül a parkettázás (szabályos ötszöglapokkal, körrel stb.).

Az egybevágó síkidomokkal történő parkettázás előkészíti a területmérést (lásd 3.7.2. fejezet), valamint a geometriai transzformációkat (lásd 3.3.1. fejezet) is.

Példák parkettamintákra

(3.13. ábra):

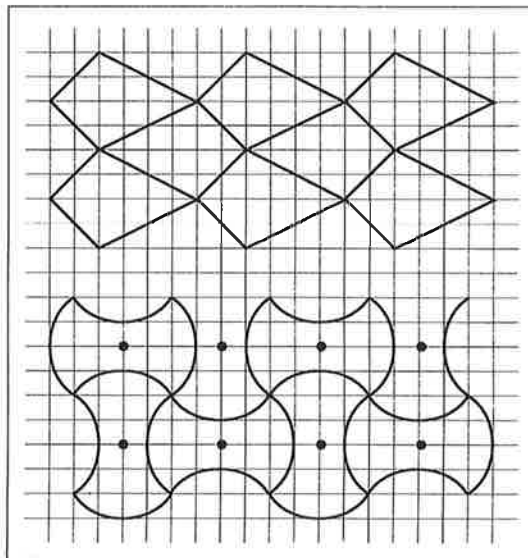


3.13. ábra

A parkettaminták kirakása jól előkészíti a vonalzóval, körzővel történő parketták rajzolását. Hálóra vagy rácstra is rajzolhatják a gyerekek a lefedő síkidomokat. (3.14. ábra)

Megjegyzés:

A kisgyerek számára a vonalzó és a körző használata nem egyszerű feladat, sok gyakorlással érhető el a biztonságos eszközhasználat.

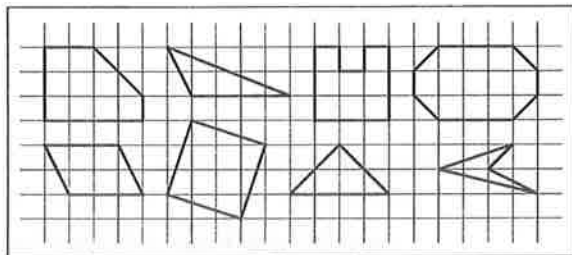


3.14. ábra

Sokszögeket leggyakrabban négyzethálóra (pontrácsra), háromszöghálóra (pontrácsra), illetve szöges-lyukas táblára másoltatunk. Mindenképpen ugyanolyan alakú, néha ugyanolyan méretű hálóra vagy pontrácsra másolnak a gyerekek, mint amilyen a másolandó alakzatot megadtuk. A másolás során tisztázzuk azt, hogy bármelyik csúcs lehet kezdőpont, illetőleg azt, hogy a körüljárás iránya is tetszőlegesen megválasztható. Hálóra vagy pontrácsra történő másolásoknál minden esetben vonalzó segítségével rajzolják be a tanulók a szakaszokat (oldalakat).

1. példa

Másold át a füzetedbe a síkidomokat! (3.15. ábra)



3.15. ábra

A síkbeli alkotásokhoz *adott feltételek* vonatkozhatnak

- a felhasználható síkidomok számára: például a logikai készlet 2, 3, 4, illetve 6 szabályos nagy háromszöglapjából teljes oldaluk illesztésével alkossanak lényegesen különböző síkidomokat;
- a létrehozandó síkidom alakjára: például 2 egybevágó derékszögű háromszöglap (teljes oldal mentén való) összeillesztésével rakjanak ki különböző négyszögeket; papírból nyírjanak olyan alakzatokat, amelyeket egyenes és görbe vonalak határolnak;
- a síkidom magasságára: például papírsíkból egy-egy vágással nyírjanak különböző hosszúságú, azonos magasságú téglalapokat;
- a síkidom területére, kerületére;
- a síkidom szimmetriatengelyeinek számára;
- a síkidom konvexitására: legyen vagy ne legyen rajta beugrás;
- a síkidom határoló oldalainak hosszára, helyzetére: például rajzoljanak olyan négyszöget, amelynek vannak egyenlő hosszúságú és párhuzamos oldalai;
- a síkidom szögeinek nagyságára: rajzoljanak olyan négyszöget, amelynek minden szöge derékszög stb.

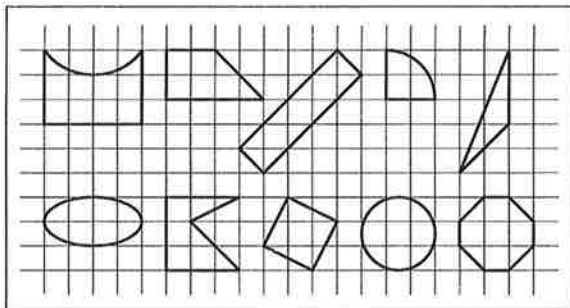
3.2.2. A sokszög fogalmának kialakítása

A szabadon végzett síkbeli kirakások, alkotások és a minta utáni másolások során szerzett geometriai tapasztalatokra építünk a síkidomok különböző szempontú válogatásánál. A *sokszög* fogalmát a síkidomokat határoló vonalak vizsgálatával készítjük elő. A fogalom bevezetéséhez a tanító a síkidomokat aszerint válogatattja a gyerekekkel, hogy csak egyenes vonaldarabok határolják-e (határoló vonaldarabjait hozzá lehet-e illeszteni a vonalzójuk éléhez) vagy sem.

1. példa

Válogassátok ki az itt látható síkidomok (3.16. ábra) közül azokat,

- amelyeket csak egyenes vonaldarabok határolnak;
- amelyeknek van görbe vonaldarabja;
- amelyeket egyenes és görbe vonalak határolnak;
- amelyeket csak görbe vonal(ak) határol(nak)!



3.16. ábra

Fontos, hogy kezdetben – ahogy a testek esetén is – ezek a válogatások konkrét tárgyi tevékenységgel történjenek. A gyerekek vegyék a kezükbe ezeket a kartonlapból kivágott síkidomokat, ujjukkal kövessék, érzékeljék a különbséget az egyenes és a görbe vonaldarabok között. Figyeljék meg, hogy a példában szereplő csupa egyenes vonaldarabokkal (szakaszokkal) határolt síkidomoknak – a trapéznek, téglalapnak, háromszögnek, ötszögnek, négyzetnek, nyolcszögnek – mindegyik oldalát hozzá lehet illeszteni az asztallaphoz vagy a vonalzó éléhez, a többi síkidom határoló vonaldarabjait viszont nem, vagy nem mindegyik vonaldarabját.

Később a konkrét válogatások helyett elegendő az ábrán színezéssel jelezni, hogy mely síkidomok tartoznak egy csoportba.

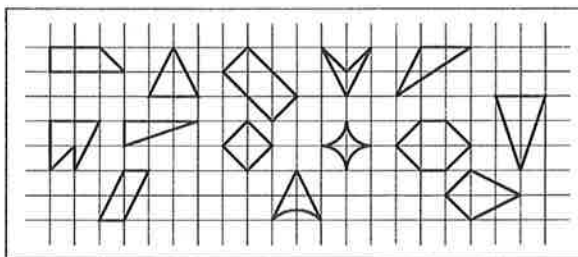
A példában bemutatott válogatásokhoz hasonló csoportosítások során nevezzük el a csupa egyenes vonaldarabokkal (szakaszokkal) határolt síkidomokat közös néven sokszögeknek. Szöges-lyukas táblán gumigyűrűk kifejezésével rövid idő alatt nagyon sokféle sokszöget alkothatnak a gyerekek.

A kartonlapból kivágott sokszögeknél, a modellezőkészlet, a logikai készlet sokszögeinél, a vonalzó segítségével rajzolt sokszögeknél mutassák meg az *oldalakat*, ujjukat húzzák végig az oldalakon, számlálják meg az oldalakat. Az oldalak találkozásainál mutassák meg a *csúcsokat*, számlálják meg egy-egy sokszög csúcsait. A síkidomok közül csak a sokszögekre használjuk

az oldal és a csúcs fogalmát. (Tehát például egy holdsarló alakú síkidomnak nincs két csúcsa.) A sokszögek csúcsok, oldalak száma szerinti válogatásai során nevezzük meg a háromszögeket, négyszögeket, ötszögeket, hatszögeket stb. A tanulók gyakran elkövetik azt a hibát, hogy a háromszögeket nem sorolják a sokszögekhez. Hangsúlyoznunk kell, hogy a háromszögek is sokszögek annak ellenére, hogy nincs „túl sok” oldaluk. A négyszögek közül kiemelten foglalkozunk a téglalappal és a négyzettel. A trapéz, paralelogramma, rombusz és deltoid elnevezéseket nem kell a gyerekeknek tudniuk az alsó tagozaton, de a tanító ezeket a négyszögeket is nyugodtan megnevezheti. A görög deltoid kifejezés helyett gyakran használjuk a sárkányidom szót.

2. példa

Színezd zölddel a háromszögeket, sárgával a négyszögeket! (3.17. ábra)

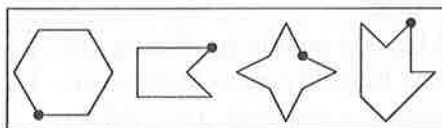


3.17. ábra

Az átló fogalmát olyan feladattal vezethetjük be, amelyben a gyerekeknek egy adott sokszög két tetszőleges, nem szomszédos csúcsát kell vonalzóval összekötniük. Megnézzük, hogy melyik két nem szomszédos csúcsot kötheték össze. A berajzolt szakaszokra bevezetjük az átló elnevezést. Megkülönböztetünk belső (a sokszög belsejében haladó), illetve külső (a sokszögön kívül haladó) átlót.

3. példa

Rajzold be a megjelölt csúcsból kiinduló átlókat! Kékkel jelöld a belső, pirossal pedig a külső átlókat! (3.18. ábra)



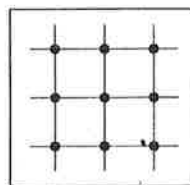
3.18. ábra

Az átlók behúzása után táblázatba foglalhatjuk a sokszög oldalainak számát és az egy csúcsból húzható átlók számát. Kerestessünk összefüggést az oldalak száma és az egy csúcsból húzható átlók száma között. Próbáljuk indokoltatni a megtalált összefüggést, azaz azt, hogy egy csúcsból az oldalak

9. példa

3×3 -as négyzet-pont rácson (3.22. ábra) hány olyan különböző

- háromszöget lehet rajzolni, amelynek csúcsai a pontokon vannak?
- négyszöget lehet rajzolni, amelynek csúcsai a pontokon vannak?



3.22. ábra

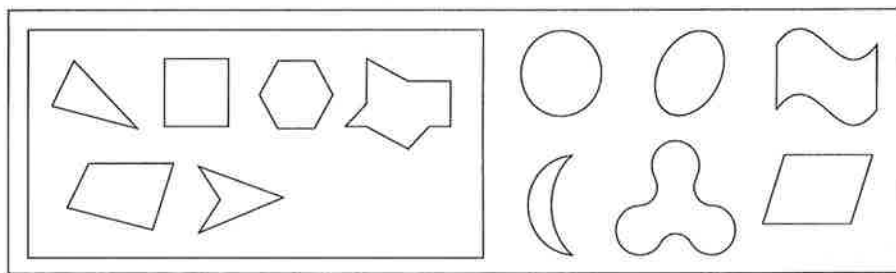
3.2.3. Síkidomok, sokszögek tulajdonságai, jellemzése

A síkidomok különböző szempontú szétválogatásával a geometriai tulajdonságokra irányítjuk a figyelmet.

A gyerekek válogathatnak – ahogy a testek esetén is (lásd 3.1.3.fejezet) – *saját szempont szerint*, a tanító által *adott szempont szerint*, *megkezdett válogatást folytatathatnak*, illetve *elrontott válogatást javíthatnak*. Ez utóbbi nagyon jól használható feladattípus a gyakoroltatni kívánt geometriai tulajdonság(ok) megszilárdításához.

1. példa

Színezd ki azt a síkidomot, amelyik a téglalapkeretből kimaradt, pedig benne lenne a helye! Fogalmazd meg a keretben lévő elemek közös tulajdonságát! (3.23. ábra)



3.23. ábra

A tanulók csoportosíthatnak aszerint, hogy

- a síkidomot csupa egyenes szakasz határolja, vagy van görbe vonaldarabja: sokszög vagy nem sokszög (lásd 3.2.2. fejezet);
- a síkidom lyukas vagy nem lyukas;
- a síkidomon van beugrás vagy nincs (konkáv vagy konvex a síkidom);
- a síkidom tükrös vagy nem tükrös;
- a síkidomnak 1 tükörtengelye van vagy több is;

- a sokszögnek hány oldala van;
- a sokszögnek hány csúcsa van;
- a sokszögnek vannak egyenlő hosszúságú oldalai vagy nincsenek;
- a sokszögnek vannak párhuzamos oldalai vagy nincsenek;
- a sokszögnek van derékszöge vagy nincs;
- a sokszögnek 1 derékszöge van vagy több is;
- a sokszögnek van derékszögnél kisebb szöge vagy nincs;
- a sokszögnek van derékszögnél nagyobb szöge vagy nincs.

A síkidom *konvexitásával* kapcsolatban azt figyeltetjük meg a vizsgált síkidomokon, hogy van-e rajtuk „beugrás” (*konkáv*) vagy nincs (*konvex*), illetve a síkidomokat udvarnak, a határoló vonalakat nem átlátszó kerítésnek képzelve el lehet-e „bújni” bennük (*konkáv*) vagy nem (*konvex*). Sokszögek esetén azt is megmutatjuk, hogy a konvex sokszöglap minden oldalát hozzá lehet illeszteni az asztallaphoz vagy a vonalzó éléhez.

Vágjanak szét a gyerekek egy egyenes vágással különböző konvex és nem konvex négyszögeket, és figyeljék meg azt, hogy hány darabra esnek szét. Azt tapasztalják, hogy a konvex négyszögek mindig két darabra, a nem konvex négyszögek kettő vagy három darabra esnek szét. A konvex és konkáv szakkifejezéseket nem vezetjük be alsó tagozaton.

A sokszögek *oldalainak hosszát*, bizonyos oldalak hosszának egyenlőségét, illetve különbözőségét vizsgálhatjuk *hajtogatással, méréssel*, valamint *körző segítségével*.

A téglalap esetén a két középvonal mentén történő hajtással könnyen megállapítható, hogy a szemközti oldalai egyenlő hosszúak. A négyzet esetén a két átló és a két középvonal mentén történő hajtással állapíthatják meg a gyerekek, hogy a négyzet minden oldala egyenlő hosszú. Mérésnél a mértékegység centiméter és milliméter lehet. Négyzethálóra rajzolt sokszögeknél a háló egyenesein lévő oldalak hossza a háló egységnyi szakaszainak megszámlálásával is meghatározható.

A körző használatakor ki kell választani egy oldalt, körzőnyílásba venni az oldal hosszát, majd ezzel a távolsággal összehasonlítani a többi oldal hosszát, így meg tudjuk állapítani, hogy a sokszögnek vannak-e egyenlő hosszú oldalai.

Miután a téglatest, kocka szemközti, illetve szomszédos lapjai helyzetének vizsgálata során bevezettük új fogalomként a *párhuzamosságot* és a

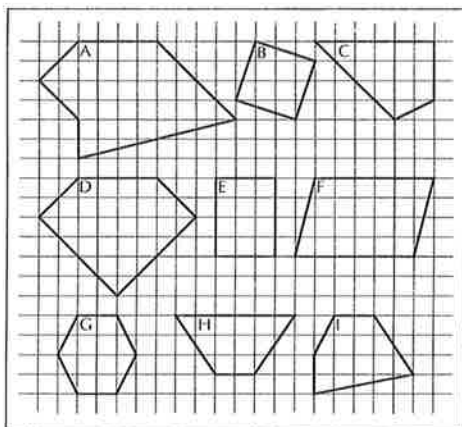
merőlegességet, valamint vizsgáltuk különböző testek lapjainak, éleinek helyzetét, áttérhetünk a síkra. Hurkapálcikák segítségével – konkrét tárgyi tevékenységgel – állítsanak elő a gyerekek a padon párhuzamos és merőleges egyenespárokat többféleképpen, később szöges-lyukas táblán feszítsenek ki gumigyűrűvel párhuzamos és merőleges szakaszpárokat, majd négyzet-pont rácson rajzoljanak vonalzó segítségével párhuzamos és merőleges egyenespárokat. Sokszögek párhuzamos, illetve merőleges oldalpárjainak felismerésében fontos szerepe van az eszközök (hurkapálcikák, hajtogatott derékszög) használatának. A szemközti oldalak párhuzamosságát a hurkapálcikáknak az adott oldalakra történő elhelyezésével ellenőrizhetik. Ha a hurkapálcikák nem érnek össze, és nem érnének össze akkor sem, ha akármilyen hosszúak lennének is, akkor ezek az oldalak párhuzamosak. A sokszögek szomszédos oldalai által bezárt szöget a derékszöggel hasonlítják össze a tanulók. Ha a két oldal derékszöget zár be egymással, akkor a két oldal merőleges egymásra. Ennek megállapítására a hajtogatott derékszöget használják, amelynek szárai hozzáilleszthetők az egymásra merőleges oldalakhoz.

A szögek nagyságának jelölésére a hegyesszög, tompaszög, homorúszög fogalmakat nem használjuk az alsó tagozaton, helyettük a derékszögnél kisebb, egy derékszögnél nagyobb, de két derékszögnél kisebb, illetve két derékszögnél nagyobb szögről beszélünk. A szög fogalmának bevezetésével és mérésével a 3.7.5. fejezetben foglalkozunk részletesen.

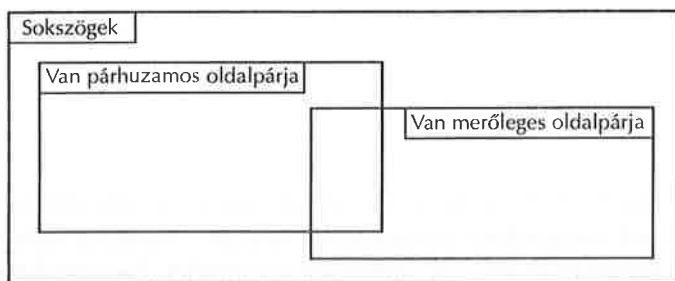
Az alsó tagozat végéhez közeledve a tanulók a megismert geometriai tulajdonságok segítségével egyre pontosabb jellemzést tudnak adni a különböző síkidomokról. A geometriai tulajdonságok gyakoroltatására, a fogalmak fejlesztésére sokféle, változatos feladatokat adhatunk a gyerekeknek, építve más matematikai témakörökkel kapcsolatos ismereteikre.

2. példa

- Színezd azonos színnel az egymással párhuzamos oldalakat!
- Színezd ki pirossal a derékszögeket! Használd a hajtogatott derékszöget! (3.24. ábra)
- Helyezd el a sokszögek betűjelét a 3.25. ábrán a megfelelő helyre!



3.24. ábra



3.25. ábra

d) Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, melyik nem a 3.24. ábrán látható sokszögekre!

Mindegyik sokszögnek van derékszöge.

Van a sokszögek között ötszög.

Van olyan sokszög, amelyiknek nincs párhuzamos oldalpárja.

Mindegyik sokszögnek van merőleges oldalpárja.

3.2.4. Speciális sokszögek. A négyzet és a téglalap

A síkidomok közül kiemelten foglalkozunk a négyzettel és a téglalappal. Ahogy azt már a kocka és a téglatest fogalmával kapcsolatban említettük, az 1–2. évfolyamon a gyerekek geometriai gondolkodása az alakzatok globális felismerésének szintjén áll (lásd 3.1.4. fejezet), azaz formájuk alapján képesek felismerni, megkülönböztetni és megnevezni az alakzatokat.

Ezt követően a 3–4. évfolyamon az *alakzatok elemzésének* szintjén a tanulók a kocka, illetve a téglatest lapjaiként is felfedezik a négyzetet és a téglalapot. Felismerik a négyzet és a téglalap oldalait, csúcsait. Megkezdődik a síkidomok, sokszögek – köztük a négyzet és a téglalap – elemzése megfigyelések, mérések, rajzolások, hajtogatások, nyírások, ragasztások, modellezések, parkettázások, tükörhasználat révén. A téglalapról – az említett konkrét tevékenységek segítségével – megállapítják és felsorolják a gyerekek, hogy 4 oldala, 4 csúcsa, 4 szöge, 2 átlója van, mindegyik szöge derékszög, szemközti oldalai párhuzamosak és ugyanolyan hosszúak, szomszédos oldalai merőlegesek egymásra, valamint van 2 – az oldalfelező pontokra illeszkedő – tükörtengelye. Ezeket a tulajdonságokat a négyzet esetén azzal egészítik ki, hogy a négyzet minden oldala egyenlő hosszú, és van további két tükörtengelye, a két átló.

Az alakzatok elemzésének szintjén álló tanulók a tulajdonságok közötti logikai kapcsolatokat még nem ismerik fel, az alakzat egyik tulajdonságáról nem tudnak következtetni a másira. A négyzet és a téglalap tulajdonságainak

összehasonlítására – ahogy a kocka és a téglatest vonatkozásában is – célszerű tulajdonságkártyákat készíteni. A tanulók megállapítják ugyan a négyzet és a téglalap közös tulajdonságait, de ebből még nem következik számukra, hogy a négyzet téglalap is egyben, annak ellenére, hogy felfedezik azt, hogy amit a téglalapról megállapítottak, mindaz elmondható a négyzetről is.

Az alsó tagozatos gyerekeknél a téglalapfogalom prototípusát azok a téglalapok alkotják, amelyeknél a szomszédos oldalak – könnyen felismerhetően – különböző hosszúak, de nem szélsőségesen eltérőek. Így a téglalapfogalom tipikus, „legjobb” példáihoz – az oldalak egyenlősége miatt – nem tartoznak a négyzetek, de nem tartoznak például a nagyon „keskeny” téglalapok („csíkok”) sem. Figyelnünk kell tehát arra, hogy a gyerekek lássanak különböző alakú és helyzetű téglalapokat. Változtathatjuk a téglalap alakját úgy, hogy a szemközti oldalak hosszát változtatjuk egészen szélsőséges esetekig, vagy változtathatjuk a téglalap és a négyzet helyzetét. A „ferdén elhelyezett” vagy „csúcsára állított” téglalapot és négyzetet is fel kell ismerniük a tanulóknak, nem csak azokat, amelyeknek az oldalai a papírlap, illetve füzetlap széleivel párhuzamosan helyezkednek el.

A speciális sokszögek közé soroljuk a szabályos sokszögeket (*szabályos háromszöget, négyzetet, szabályos ötszöget, szabályos hatszöget, ...*), azokat a konvex sokszögeket, amelyeknek oldalai és szögei egyenlők. Figyeltessük meg a gyerekekkel a vizsgált szabályos sokszögeken az oldalak egyenlőségét, néhányuknál a – hajtogatott derékszöggel és annak törtrészeivel könnyen mérhető – szögek egyenlőségét.

Kitűzhetünk a gyerekeknek olyan feladatokat, amelyek szabályos sokszögek alkotására, illetve amelyek szabályos sokszögekből újabb sokszögek előállítására irányulnak.

1. példa

Alkossatok először a logikai készlet 2, majd 3, azután 4, végül 6 nagy

- a) háromszöglapjából;
- b) négyzetlapjából teljes oldaluk illesztésével különböző sokszögeket!

2. példa

Rajzoljatok

- a) olyan négyszöget, amelyeknek minden oldala egyenlő és minden szöge derékszög;
- b) olyan sokszöget, amelynek 3 oldala van, és mindegyik oldala egyenlő hosszú!

3.3. Geometriai transzformációk

A *geometriai transzformáció* a tér, illetve a sík pontjainak halmazán értelmezett függvény, így tanításával a térszemlélet fejlesztésén túl a függvény fogalmát (lásd 5.2. fejezet) is mélyítjük. A geometriai transzformációk segítségével figyeltetjük meg az alakzatok egy-egy tulajdonságának megmaradását, illetve változását. Alsó tagozaton a transzformációk tartalmának szemléletes alapozása a feladatunk.

A geometriai fogalmak alakításánál általában az általánosabbtól haladunk a speciálisabb felé. A transzformációknál azonban célszerű eltérni ettől. Előbb foglalkozunk az egybevágósági transzformációkkal, később a hasonlósággal, majd ezt követően, illetve ezzel párhuzamosan egyéb transzformációkkal is.

3.3.1. Egybevágósági transzformációk

Egybevágósági, azaz a távolságtartó transzformációkhoz soroljuk a *tükrözéseket, eltolásokat és az elforgatásokat*.

Egy alakzat és a távolságtartó transzformáció során keletkezett képe *egybevágó*. Alsó tagozaton az egybevágó kifejezés helyett gyakran az *ugyanolyan alakú és ugyanolyan méretű* kifejezést használjuk. Síkban az egybevágóság egymásra illeszthetőséget, fedésbe hozhatóságot jelent, a térben ezt a szemléletes képet nem tudjuk alkalmazni.

Tükrözések: síkra való tükrözés térben, tengelyes tükrözés síkban

Kezdetben a gyerekek úgy szereznek tapasztalatokat, hogy saját mozgulataikat, különböző tárgyak képét figyelik meg tükörbe nézve.

A térbeli és síkbeli tükrözések fontos eszköze a zsebtükör is. Egy alakzat tükörképét előállíthatjuk a zsebtükörben előzőleg megfigyelt kép kirakásával, megépítésével. A *síkra való tükrözés* pontos végrehajtása érdekében építhetnek a gyerekek négyzetrácsos lapra, így ugyanis le lehet számolni az építmény és tükörképének tükörtől való távolságát a tükör előtt, illetve a tükör mögött. Kezdetben mindenképpen úgy helyezzük el az építményt, hogy alapélei a háló egyenesein legyenek, mert így könnyebb a tükörképet megépíteni. A tükröt az építménytől távolabb, az egyik – lehetőleg előre bejelölt – hálóegyenesre tegyék a tanulók, és a tükörkép megfigyelése alatt tartásuk függőlegesen. A tükörben látható képen megfigyeltetjük a tükrözés egyes tulajdonságait, például hogy

- a tükörkép ugyanolyan alakú és ugyanakkora, mint az eredeti építmény;

- a tükörkép ugyanakkora távolságra van a tükrőtől, mint az eredeti építmény;
- az eredeti építmény, például ház bal oldalán lévő kémény a tükrözés után a tükörkép jobb oldalán lesz.

Az ún. *tükörképjátékokkal*, azaz a képzeletbeli tükrőben látható mozdulat bemutatásával a gyerekek a kép és tükörkép tulajdonságairól szereznek további tapasztalatokat.

1. példa

Ültessünk le egymással szembe két tanulót. Egy harmadik tanuló mutassa meg, hová tenné a képzeletbeli tükröt, hogy az egymással szemben ülő tanulók egymás tükörképei legyenek. Az egyik tanuló emelje fel a jobb kezét, majd nyújtsa előre a bal kezét, végül tegye csípőre a jobb kezét, a másik – vele szemben lévő – tanuló pedig játssza el a tükörképet.

Megjegyzések:

- A tükörképjátékoknál természetesen nem pontos tükörkép keletkezik, hiszen két gyerek mutatja be. A lényeg a mozdulatok és a tükrőmozdulatok összehasonlítása.
- Megfigyeltetjük a jobb és bal kéz szerepének felcserélődését.

2. példa

Ültessünk le egymás mellé két tanulót. A képzeletbeli tükrő helye a két tanuló között közepén, függőlegesen legyen. Az egyik tanuló emelje fel a bal kezét, majd engedje középtartásba, fordítsa a fejét balra, végül emelje középtartásba a jobb kezét, a másik tanuló pedig játssza el a tükörképet.

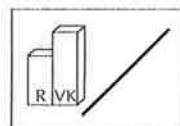
Megjegyzés:

A különbségek megfigyelésénél általában nehezen fedezik fel a gyerekek a jobb és bal oldal felcserélődését és a körüljárási irány megfordulását.

Példák tükörkép kirakására, megépítésére:

3. példa

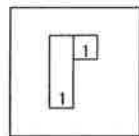
Építsd meg a képen látható testet rózsaszín és világoskék rudakból! A vastagon kihúzott vonalra állíts tükröt! Figyeld meg benne a tükörképet és építsd meg! Hasonlítsd a tükörképet az eredetihez! (3.26. ábra)



3.26. ábra

4. példa

Építs az alaprajzon világoskék rudakból! Másold is le ugyanakkora méretben! Az építménytől távolabb jelöld ki a tükör helyét! Nézd meg az építmény tükörképét, és anélkül, hogy a padról felemelnéd, próbáld meg átmozgatni a másolatot az első építmény tükörképébe! (3.27. ábra)



3.27. ábra

Megjegyzés:

Ez nem sikerülhet. Felemelés nélkül nem lehet úgy elforgatni, elcsúsztatni, ahogy a tükörben látható.

Kerestessünk a gyerekekkel a környezetükben olyan tárgyakat, amelyek egymás tükörképei. Például a bal cipő és a jobb cipő. Próbálják meg a bal cipőt forgatni, ezáltal rájöhetnek, hogy a bal cipő semmilyen mozgással nem vihető át a jobb cipőbe. Ilyen példákön keresztül tapasztalhatják meg a tanulók, hogy az építményeket általában nem lehet átmozgatni a tükörképükbe. Azokat az építményeket lehet átmozgatni a tükörképükbe, amelyek tükrösek, azaz rendelkeznek szimmetriásíkkal. A térbeli és síkbeli tükrözéshez kirakott formák legyenek kezdetben aszimmetrikusak, hogy a tükörképüket meg lehessen különböztetni tőlük.

Példa a tükör helyének megkeresésére:

5. példa

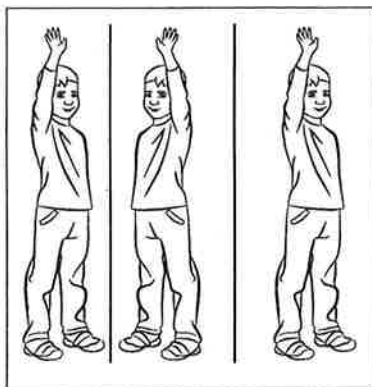
Legyen két – gyufásdobozokból készített – építmény egymás tükörképe. Próbálgatással keresd meg a tükör helyét!

Párhuzamos síkokra való tükrözések egymásutánját is végeztetjük a gyerekekkel, ezáltal a transzformációk kapcsolatát készítjük elő. Jelen esetben azt, hogy két párhuzamos síkra történő tükrözés egy eltolással helyettesíthető.

6. példa

Álljon egy vonalban egymás mellé három tanuló. A képzeletbeli tükrök az első és második között középen, valamint a második és harmadik között középen vannak. Az első tanuló kezdjen el egy mozgást, a második tanuló játssza el az első tükörképét, a harmadik pedig a másodikét, azaz a tükörkép tükörképét! (3.28. ábra)

Figyeltessük meg a két szélső tanuló egyforma mozgását, hiszen ha az első tanuló balra mozdult, akkor a tükörképet alakító második jobbra, a harmadik pedig a második tükörképeként ismét balra. Felvethetjük azt a problémát is, hogy el tudna-e indítani az első tanuló egy olyan mozgást, hogy mind a hárman egyformán mozogjanak (például guggolás, kezek oldalsó középtartásba helyezése).



3.28. ábra

Színes rudakból, illetve gyufásdobozokból épített testeket is tükrözzenek két egymással párhuzamos síkra. Itt is azt tapasztalják a gyerekek, hogy a két szélső építmény ugyanolyan alakú és ugyanakkora, valamint ugyanúgy is áll, mint az első. Adhatunk olyan feladatot, amelyben olyan építményt kell alkotniuk, hogy a tükrözések végrehajtása után ne csak a két szélsőre, hanem mind a három építményre teljesüljön ez a feltétel. Próbálgatások révén rájöhetnek a tanulók arra, hogy csak a tükrös, azaz a szimmetriasíkkal rendelkező építmények felelnek meg a feltételnek.

A síkra való tükrözések tanítása után foglalkozunk a térbeli alakzatok *szimmetriájával, tükrösségével*, amely az alakzatok tulajdonságaként jelenik meg. Síkszimmetrikus, tükrös testet hozhatunk létre, ha egy építmény tükörképének kirakásakor a tükröt az építmény oldallapjához helyezzük. Az eredeti építmény és a tükörkép együtt tükrös építményt alkot. A tükör különböző – más-más oldallapjához történő – elhelyezésétől függően többféle tükrös építményt lehet kirakni. A tükör helyén szimmetriasíkja van a testnek.

Testek síkra vonatkozó szimmetriájának vizsgálatához hozzátartozik a szimmetriasíkok helyének és számának meghatározása.

7. példa

Vegyétek a gyufásdobozt a kezetekbe! Rajzoljátok be rajta annak a vágásnak a helyét, amely mentén, ha elvágnánk a gyufásdobozt és az egyik felét a vágás mentén a tükröre illesztenénk, akkor az egész gyufásdobozt látnánk! A tükörsík helyét kell berajzolnotok. Ha többet is találtok, mindegyiket jelöljétek más-más színnel! Hányat találtatok?

Megjegyzés:

Egybevágó, téglatest alakú szivacsokon (burgonyákon, gyurmán) könnyen

bemutathatjuk a három különböző vágást. Ellenőrzésként mind a három esetben az egyik darabot illesszük a vágási felület mentén a tükörre. Ha a gyerekek belenéznek a tükörbe, megbizonyosodhatnak arról, hogy az adott darab és a tükörképe együtt az eredeti téglatest alakját adja.

A kocka 9 tükörsíkjának meghatározása már jóval nehezebb és időigényesebb feladat, nem várható el az alsó tagozatos tanulóktól. Egyéb, szimmetriasíkkal rendelkező testek esetén is meghatározhatják a tanulók a tükörsíkok helyét és számát, például hogy a szabályos ötszög alapú hasábnak hat, a hengernek, a kúpnak és a gömbnek nagyon sok (végtelen sok) szimmetriasíkja van stb.

A síkbeli tengelyes tükrözésnél a tükörkép előállítását változatos eszközökkel, tevékenységekkel valósítatjuk meg.

8. példa

Hajtsátok félbe az előttetek lévő lapot! Azután terítsétek ki, és a hajtásélt vonalzó segítségével, pirossal húzzátok át! A lap bal oldalára nyomjatok egy kis temperát, majd a lapot újra hajtsátok félbe az előző módon, és jól szorítsátok össze a papírlap két felét! Újra terítsétek ki! Mit láttok?

Megjegyzés:

A tükörkép ellenőrzését a piros hajtásélre (a síkra merőlegesen) helyezett tükör segítségével végezhetik a tanulók.

9. példa

A fekete fotópapírokra előre megrajzoltam egy holdsarló alakját. Hajtsátok félbe a papírt úgy, ahogy mutatom! Mindenkinek adtam egy gombostűt. Ezzel szurkáljátok körül a hold megrajzolt határvonalát úgy, hogy a tű minden szúráskor mindkét lapot átdöfje! Ha készen vagytok, nyissátok szét a papírlapot, és a fény felé tartva nézzetek át rajta! Mit láttok?

Megoldás

A gyerekek megállapíthatják, hogy a papír két felén lévő ugyanolyan alakú és ugyanakkora holdak tükrösen, szimmetrikusan helyezkednek el, a hajtásvonaltól ugyanakkora távolságra, de ellentétesen görbülnek, ami a körüljárási irány megfordulására utal.

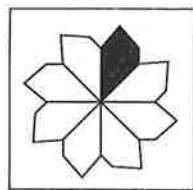
Az eredeti és az elforgatással kapott alakzat összehasonlítása révén megfigyelhetjük a transzformáció egyes tulajdonságait:

- az eredeti és az elforgatással kapott alakzat ugyanolyan alakú és ugyanakkora;
- a körüljárási irány nem változik (mert a sablont a másolás során nem fordították át).

Az elforgatást felismertethetjük sordíszeken, szövetmintákon, színezett parkettákon stb.

16. példa

Határozd meg, hogy a minta a kiszínezett síkidom milyen elforgatásaival keletkezett! (3.34. ábra)



3.34. ábra

Megjegyzés:

Elforgatások egymásutánját is megfigyelhetjük ennél a feladatnál. Jelen esetben azt, hogy két egymás után végrehajtott ugyanolyan irányú nyolcad fordulat egy, az előzőekkel meg egyező irányú negyed fordulattal helyettesíthető. Négy egymás után végrehajtott ugyanolyan irányú nyolcad fordulat két egymás után végrehajtott ugyanolyan irányú negyed vagy egy ugyanolyan irányú fél fordulattal helyettesíthető.

3.3.2. Hasonlósági és egyéb transzformációk

Hasonlósági és egyéb transzformációk tanításánál – az egybevágósági transzformációkhoz hasonlóan – a transzformációk tartalmának szemléletes alapozása, az építések, kirakások, rajzolásból származó tapasztalatok összegyűjtése, valamint az ezekből feltárható összefüggések felismertetése a célunk. A feladatokhoz kapcsolódó kérdéseinkkel irányítsuk a figyelmet a transzformációk lényegi elemeire anélkül, hogy a megfelelő szakkifejezéseket bevezetnénk.

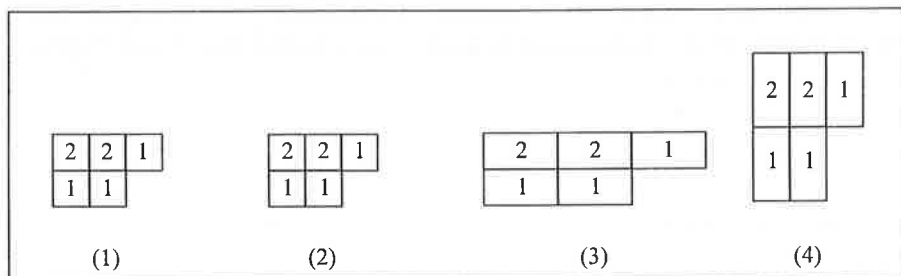
A hasonlósági transzformációkhoz soroljuk a *nagyításokat*, *kicsinyítéseket* és valamennyi egybevágósági transzformációt. Az egybevágósági transzformációk hasonlósági transzformációkhoz sorolása alsó tagozaton hasonló problémát vet fel, mint a négyzetek téglalapokhoz vagy a kockák téglateszekhez sorolása. A transzformációk közötti tartalmazási kapcsolatokat sem veszik észre a kisiskolások.

A hasonlósági transzformációkkal párhuzamosan hajtsanak végre a gyerekek olyan nem hasonlósági (arányt nem tartó) transzformációkat, mint az egyirányú *nyújtás*, *zsugorítás* vagy a *torzítás*, ezáltal össze tudják hasonlítani hasonlósági, illetve nem hasonlósági transzformációval létrehozott alakzatok alakját.

Nagyítással vagy kicsinyítéssel ugyanolyan alakú, azaz *hasonló alakzatokat* kapunk. Az egybevágósági transzformációkkal is ugyanolyan alakú alakzatokhoz jutunk, amelyek ráadásul ugyanakkorák is. Nyújtás, zsugorítás, torzítás során az alakzatok alakja megváltozik.

1. példa

Építs az (1) alaprajz alapján fehér kiskockákból, majd a fehér kiskockák helyett használd a 2-es Dienes-készlet nagykockáit! A (2), (3), (4) alaprajz szerint rózsaszín rudakból építs! (3.35. ábra)



3.35. ábra

Megoldás

A rózsaszín nagykockákból készült építmény kétszeres nagyítása a fehérnek. A kétszeres nagyítás a test méreteit mindhárom irányban a kétszeresére növeli. A kapott test ugyanolyan alakú, csak nagyobb. Az összehasonlítás fordítva is történhet, amikor a fehér kiskockákból készült építményt hasonlítjuk a rózsaszín nagykockákból épített testhez. Ez utóbbit felére kicsinyítve kapjuk a fehér építményt.

A rózsaszín rudakból megépített testeknél azt figyeltetjük meg, hogy egy építmény nemcsak felfelé a magassága, hanem a hosszúsága, a szélessége irányába is megnyúlhat. Amikor a rózsaszín rudakat állítva (2) helyeztük el, az épület felfelé nyúlt meg, amikor fektetve, akkor a fektetés irányától függően hosszában (3), illetve szélességében (4) nyúltak meg az építmények a kétszeresükre. Újra megfogalmaztatjuk, hogy a rózsaszín rudakból épített testek alakja a fehérhez képest megváltozott, az egyik hosszúkásabb, a másik tömörsibb, a harmadik szélesebb lett. Amennyiben a fehér kiskockákból készült építményt hasonlítjuk rendre a rózsaszín rudakból építettekhez, akkor azt mondhatjuk, hogy felére zsugorodott az építmény először függőlegesen (laposabb, alacsonyabb lett), majd vízszintesen hosszában (rövidebb lett), illetve szélességében (keskenyebb lett).

Megoldás

A sötétre színezett háromszöghöz hasonló a világos háromszögek közül az első (a sötét kétszeres nagyítása), a harmadik (a sötét felére kicsinyítése) és a negyedik (a sötét háromszoros nagyítása), a többi három más alakú.

Megjegyzések:

- Az egymáshoz hasonló testek, illetve síkidomok különböző helyzetben is lehetnek (nem kell feltétlenül ugyanúgy állniuk).
- Mutassunk példát a hasonlóság köznyelvi és geometriai értelmezésének különbözőségére (például két, geometriai értelemben nem hasonló téglalap összehasonlítása kapcsán).

3.4. Tájékozódás térben, síkban, vonalon

3.4.1. Térbeli viszonzyszavak

Az iskolaérettségi tesztek szóhasználatával élve az ún. relációs szókincs fejlesztése kiemelt feladat az 1. évfolyamos tanulóknál. Ebben a fejezetben a térbeli relációkat leíró viszonzyszavakkal foglalkozunk. Ezek alapvetően az *alatt-felett*, *előtt-mögött*, *jobbra-balra* ellentétpárok, de idetartoznak a *között* és a *mellett* viszonzyszavak is.

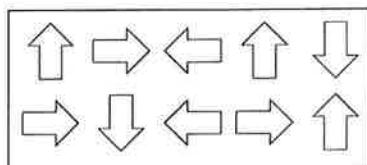
A térbeli viszonzyszavak használata statikus szituációkban

Statikus szituáción azt értjük, hogy a tárgyak egymáshoz viszonyított helyzetét rögzített térbeli elrendezésben vizsgáljuk. Első lépésként a tanulóknak a saját testükhöz viszonyítva kell megkülönböztetni az *alatt-felett*, *előtt-mögött*, *jobbra-balra* viszonyokat (irányokat). Ezt követően ezeket a megkülönböztetéseket más személyhez viszonyítva, majd végül nem élő objektumokhoz viszonyítva is végzik.

Viszonyítás saját testünkhöz:

1. példa

Színezd ki a jobbra mutató nyilakat pirosra, a balra mutatókat pedig sárgára! (3.39. ábra)



3.39. ábra

Viszonyítás más személyhez:

2. példa

Álljon ki az osztály elé egy tanuló. Hívjunk ki további négy gyereket, az egyik álljon a tanuló elé, a másik mögé, a harmadik tőle jobbra, a negyedik pedig balra.

Viszonyítás élettelen objektumhoz:

3. példa

Tegyük ki az osztály elé egy olyan széket, amelynek nincs kitüntetve az eleje és a hátulja. Plüss állatfigurát kell elhelyezni a székhez viszonyítva az állításoknak megfelelően.

- a) A maci a szék alatt van.
- b) A maci a szék mögött van.
- c) A maci a széktől jobbra van.

Megoldás

A *b)* és *c)* elhelyezés nem egyértelmű. Visszonyíthatunk az osztály tanulóihoz, de a tábla elé kihívott (az osztállyal szemben álló) tanulóhoz is. Mindkét esetben meg kell határozni továbbá azt is, hogy melyik irányt tekintjük például a szék hátuljának.

- b) Ha megállapodtunk például abban, hogy az osztály tanulóihoz viszonyítunk, akkor is két jó elhelyezés van: Ha az elrendezést úgy tekintjük, mintha az osztály tükörből nézné azt, akkor a szék hátulja a nézőktől távolabbi oldal, ha nem, akkor az ellenkező, a nézőkhöz közelebbi.
- c) Ha a *b)* elrendezés megbeszélésénél rögzítettük a viszonyítási pontot és az *előtt-mögött* irányt, a *jobbra* irány meghatározásához még mindig megmarad a két lehetőség, mert a hétköznapi életben nem vagyunk konzekvensek. Például ha szemben állunk egy szekrénnel, annak bal oldali ajtajának megjelölésénél még magunkhoz viszonyítunk, viszont hasonló esetben egy ház bal oldalát magunkhoz viszonyítva adjuk meg.

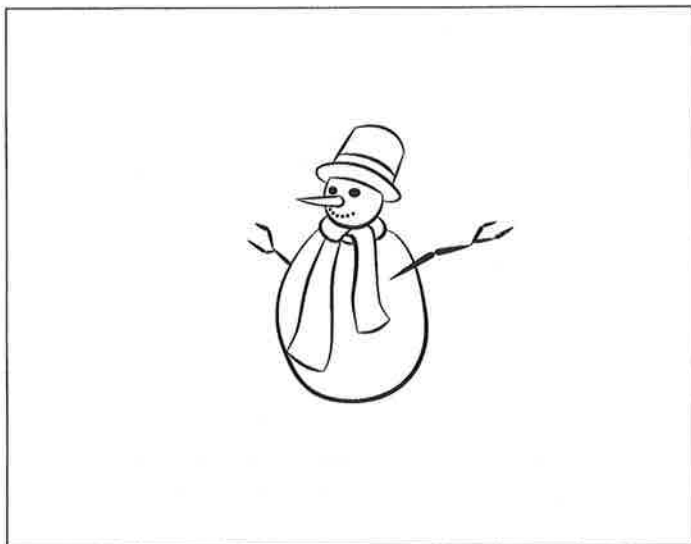
A viszonyítási pontok közötti váltás gyakorlása időigényes feladat, és nem elegendő csupán az első év elején foglalkozni ezzel.

Ugyancsak problémát jelent, ha térbeli objektumok viszonyát síkban lerajzolva akarjuk meghatározni. A képi ábrázolásnál további hallgatóságos megállapodást kell kötnünk. Például a távolabbi tárgyat a rajzlapon fentebb helyez-

zük el. Fontos tehát, hogy a térbeli viszonzyszavak használatát először térbeli szituációkban gyakoroljuk, ne térjünk rá idő előtt a rajzos feladatokra.

4. példa

Rajzolj a hóember fölé egy felhőt, elé egy bokrot, tőle jobbra egy lapátot, balra egy vödört, mögé pedig egy nyuszt! (3.40. ábra)



3.40. ábra

Megjegyzés:

A térbeli irányok közül a legegyszerűbbnek az *alatt-felett* kapcsolat meghatározása tűnik, a legnehezebb a *jobb-bal* megadása, köszönhetően például az emberi test ilyen irányú szimmetriájának.

A térbeli viszonzyszavak használata dinamikus szituációkban

Dinamikus szituáción valamiféle mozgáselképzelést értünk. Ez a képzeletbeli utazás vezet el a szűkebb értelemben vett tájékozódáshoz, majd később a térképhasználathoz is.

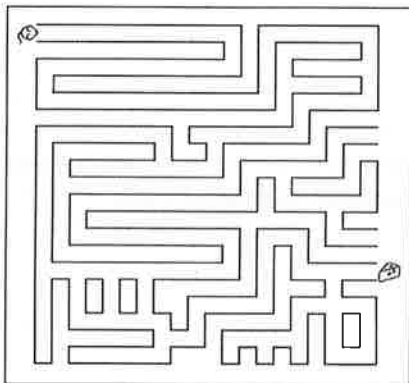
A térképhasználat előkészítését is jelenti az ún. labirintusjátékok, amelyekben ugyan viszonzyszavakat még nem használunk, de egy összefüggő töröttvonal megrajzolásával mégis útvonalat határozunk meg.

5. példa

Melyik úton jut el az egér a sajthoz? Vezesd oda! (3.41. ábra)

A térbeli viszonzszavak helyes használatához első lépésként elvárjuk, hogy a tanulók egy adott irányba történő haladás esetén meg tudják különböztetni az út két oldalát. Ezt követi a jobbra-balra fordulás értelmezése, majd egyszerű térképvázlaton útvonalak megadása. Útvonalak elképzelésénél és megfogalmazásánál nagy szerep jut a szóbeli kifejezőképesség fejlesztésének is. A Hogyan

jutok el? típusú feladatokkal tehát nemcsak a térbeli tájékozódóképességet, ezen belül a viszonzszavak használatát, hanem a verbális kommunikációt is fejlesztjük.



3.41. ábra

6. példa

Robotjáték: Kiküldünk egy tanulót a teremből, s elrejtünk egy tárgyat. A visszahívott gyerekek a többiek utasítása alapján kell megtalálnia a tárgyat.

Lehetséges utasítások:

Menj előre 3 lépést!

Fordulj balra!

Fordulj hátra!

Stb.

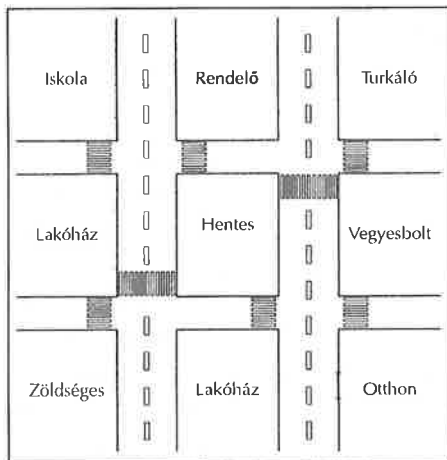
Megjegyzés:

A feladat azon kívül, hogy segít abban, hogy másik ember helyébe képzelve határozzuk meg az irányokat, a távolság lépésekkel történő becslésére is szolgál.

7. példa

Hogyan juthat el Zsolti otthonról az iskolába? (3.42. ábra)

Használd a következő kifejezéseket:
Kilép a házból, jobbra/balra fordul,
elmegy a-dik útkereszteződésig,
befordul jobbra/balra stb.



3.42. ábra

3.4.2. Tájékozódás a síkban

A síkbeli tájékozódás leegyszerűsödik a négy főirány – *le-fel, jobbra-balra* – megismerésére és használatára. Ezek biztos ismerete előfeltétele mind az írás-olvasás, mind a matematikai ismeretek elsajátításának. A síkbeli tájékozódás végső soron matematikailag azt jelenti, hogy minden síkbeli pont helyzetét le tudjuk írni két adattal, két koordinátával. Ahhoz, hogy majd a felső tagozaton eljussunk a derékszögű koordináta-rendszer értelmezéséhez, már alsó tagozaton előkészítő tevékenységeket végzünk.

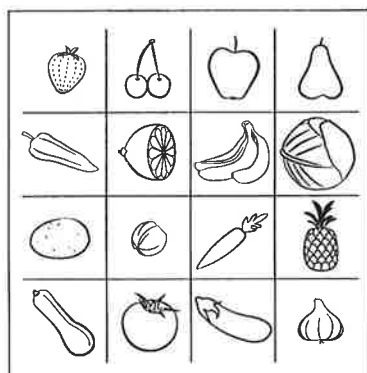
Táblázatos elrendezés

A sor és oszlop fogalmak megértése, tájékozódás a táblázatban:

1. példa

Válaszolj a kérdésekre! (3.43. ábra)

- Hányadik sorban van a citrom?
- Hányadik oszlopban van a citrom?
- Mi van alatta?
- Mi van felette?
- Mi van tőle jobbra?
- Mi van tőle balra?
- Milyen gyümölcs van a 4. oszlop 2. sorában?



3.43. ábra

Négyzetrács pontjainak azonosítása

Két adat alapján a négyzetrács pontjainak vizuális azonosítása, illetve fordítva, négyzetrácson kijelölt pontok jellemzése két adattal:

2. példa

A táblázat oszlopait betűkkel, sorait számokkal jelöltük.

Melyik szám áll az A2 helyen? Melyik szám áll a D1 helyen? Mennyi a két szám szorzata? Melyik helyen áll ez a szám?

	A	B	C	D
1	2	9	0	5
2	3	6	4	10
3	1	7	8	11
4	12	20	15	20

Megjegyzések:

- A feladattal a műveletvégzést is gyakoroltathatjuk.
- A közismert Torpedó játék ugyancsak a fenti célt szolgálja.

Mozgás négyzetrácson

Útvonal megadása a sík négy főirányát szimbolizáló jelsorozattal ($\leftarrow \uparrow \rightarrow \downarrow$):

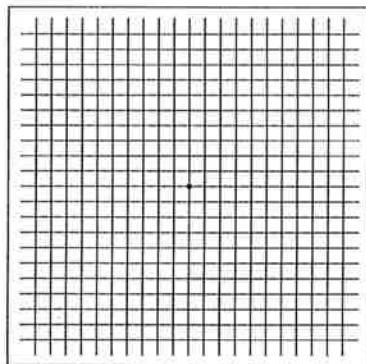
3. példa

Készíts rajzot a négyzetrácson a nyílsorozatnak megfelelően! A megjelölt rácsponttól indulj! (3.44. ábra)

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \downarrow \rightarrow \downarrow \leftarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \uparrow \uparrow \uparrow \leftarrow \uparrow \rightarrow \uparrow \rightarrow \rightarrow$

Megjegyzés:

A feladat a töröttvonal hosszának, illetve az alakzat területének meghatározását is segíti.



3.44. ábra

3.4.3. Tájékozódás vonalon

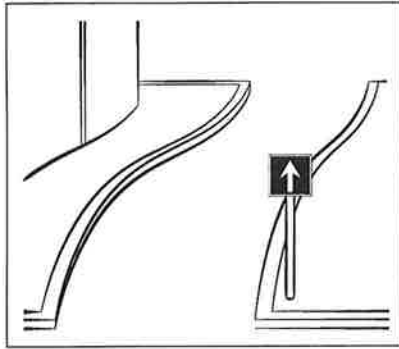
A vonalon történő tájékozódás két irány megkülönböztetését jelenti. Már első osztályban a számfogalom alakításánál megismerkednek a tanulók a számegyenes fogalmával (lásd 1.1.6. fejezet). A számegyenes megadásához meg kell adnunk a 0-nak megfelelő pontot, az egységnyi távolságot és a növekedés irányát. Tárgyalásunk szempontjából most ennek az utóbbinak van jelentősége. Egy egyenes irányítása kétféle lehet. Amennyiben kiválasztjuk az egyik irányítást, egyértelműen megadhatjuk az egyenes jobb és bal oldalát is. Természetesen egyenes helyett tetszőleges nyílt görbe, azaz tetszőleges

alakú nyílt vonal irányítását is vizsgálhatjuk. Ennek megfelelően szoktunk a számegyenes helyett számvonalat is használni.

1. példa

Rajzolj az út jobb oldalára megállni tilos táblát, bal oldalára pedig egy parkolótáblát! A haladási irányt tábla jelzi. (3.45. ábra)

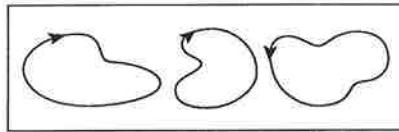
Nyílt görbék irányításáról zártakra átérve eljutunk a körüljárási irány fogalmához. Egy síkidom körüljárási irányát kétféleképpen lehet megadni: az óramutató járásával megegyezően vagy azzal ellentétesen.



3.45. ábra

2. példa

Járd körbe a vonalakat a nyíl irányában haladva! Rajzolj az alakzatok bal oldalára egy-egy zöld pontot, majd színezd mindegyik belsejét sárgára! (3.46. ábra)



3.46. ábra

3.5. A mérés tanítás általános szempontjai

3.5.1. Mértékegység nélküli összehasonlítások, összemérések

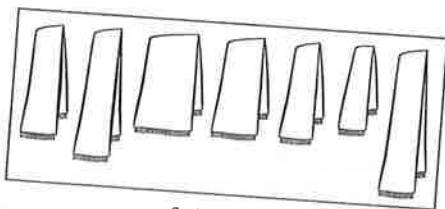
A mérés tanítás előkészítését mennyiségek összehasonlításával kezdjük. Kezdetben nagy mennyiségi eltérést mutató tárgyakat ránézésre hasonlítunk össze, majd az eltérés mértékét csökkentjük. Az összehasonlítások során hangsúlyt helyezünk a szókincs bővítésre, a mennyiségeket jellemző szavak pontos jelentésére. A következő ellentétpárokat használjuk és értelmezzük:

- Hosszúság jellegű mennyiségeknél: hosszabb-rövidebb, alacsonyabb-magasabb, szűkebb-bővebb, szélesebb-keskenyebb, kisebb-nagyobb.
- Tömeg jellegű mennyiségeknél: könnyebb-nehezebb, súlyosabb-kevesbé súlyos.
- Űrtartalom jellegű mennyiségeknél: több-kevesebb fér bele, nagyobb űrtartalmú – kisebb űrtartalmú.
- Idő jellegű mennyiségeknél: korábbi-későbbi, hosszabb-rövidebb.

1. példa

Színezz úgy, hogy igazak legyenek az állítások! (3.47. ábra)

- A leghosszabb sál sárga, a legrövidebb piros.
- A legszélesebb sál csíkos, a legkeskenyebb pöttyös.
- Az ugyanolyan hosszú sálak ugyanolyan színűek.



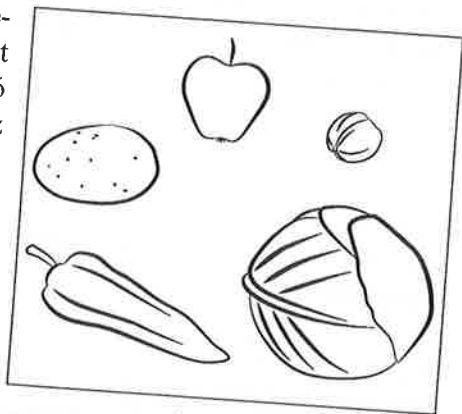
3.47. ábra

Megjegyzés:

A feladatban a hosszabb-rövidebb és a szélesebb-keskenyebb ellentétpárok értelmezéséről van szó. Az összehasonlítás elvégezhető ránézésre is, nem szükséges közvetlen összemérés. A megoldás során az is kiderül, hogy a hosszúság és a szélesség egymástól független jellemző, tehát lehetnek ugyanolyan hosszúak a különböző szélességű sálak is.

2. példa

Hasonlítsd össze az élelmiszerek tömegét! Az összehasonlítások eredményét jelöld a rajzon a nehezebb felé mutató nyíllal! Számozással állítsd sorba az élelmiszereket! (3.48. ábra)



3.48. ábra

Megjegyzések:

- A feladat a *Mérések* témakörön túl a *Relációk* témakörbe is beletartozik, a „nehezebb” rendezési reláció értelmezésére, alkalmazására szolgál. A berajzolt nyilak egyértelművé teszik a reláció által indukált sorrendet.
- Az élelmiszerek sorba rendezése, a sorszám fogalmának alakítására is alkalmas.
- Ahhoz, hogy a „nehezebb” fogalmáról a tanulók tudatosan képet alkothassanak, fontos, hogy a lerajzolt tárgyakat a tanulók tényleg megvizsgálják, megemeljék, összehasonlítsák tömegüket. Ezt követően lehet az írásbeli munkát elvégezni.

Miközben mennyiségi összehasonlításokat teszünk, hozzájárulunk számfogalom alakításához is. A természetes számok értelmezéséhez többféle jelentéstartalomra támaszkodunk. A véges halmazok számosságán (darabszám) alapuló értelmezés mellett a mérőszámként való értelmezés is összehasonlításokkal alapozható meg. Míg az első esetben diszkrét mennyiségeket (darabszámokat) hasonlítunk össze, addig a másodikban folytonos mennyiségeket (lásd 1.1.1.–1.1.4. fejezetek).

Az **összemérés** két mennyiség közvetlen összehasonlítását jelenti, és egy lépéssel közelebb visz a mérés szükségességének alátámasztásához. Az összemérés bemutatásához olyan mennyiségeket választunk, amelyek között kicsi az eltérés, így ránézésre nem könnyű megmondani, melyik nagyobb vagy kisebb.

Hosszúságok összehasonlításakor egymás mellé helyezzük a tárgyakat, közös kiindulóponttal, és így állapítjuk meg, hogy melyik mennyiség nagyobb. Például két szalag egyik végét összefogjuk, hogy eldöntsük, melyik a hosszabb, két gyereket egymásnak háttal állítva eldöntjük, hogy melyik a magasabb.

Tömegek összemérését úgy végezzük, hogy a két mennyiséget például vállfából készült „mérleg” két oldalára akasztjuk, és figyeljük, hogy melyik oldal billen le.

Úrtartalmakat például úgy tudunk összemérni, hogy azonos alakú és méretű edényekbe öntjük a folyadékokat, az edényeket egy asztalon egymás mellé állítjuk, és megnézzük, melyikben áll magasabban a folyadékszint.

Bizonyos tevékenységek, események időtartamát úgy tudjuk összemérni, hogy egyszerre kezdjük a két eseményt, és megnézzük, melyik fejeződik be hamarabb.

3. példa

Igaz vagy hamis? (3.49. ábra)

- A sárga csészébe fér a legkevesebb kakaó.
- A sárga csészébe kevesebb kakaó fér, mint a kékbe.
- A kék csészébe több kakaó fér, mint a pirosba.
- A piros csészébe ugyanannyi kakaó fér, mint kékbe.



3.49. ábra

Megjegyzés:

A feladatban edények űrtartalmát hasonlítjuk össze, nem pedig adott folyadékmennyiségeket, ezért az összemérést a gyakorlatban úgy is elvégezhetjük, hogy két csésze közül az egyiket teletöltjük vízzel, majd ezt a vizet átöntjük (megpróbáljuk átönteni) a másikba. Ha mindet beleöntöttük, és még férne, akkor az első csésze űrtartalma a kisebb, ha nem fér bele mind, akkor a másodiké stb.

3.5.2. A mérés fogalma, mérési tapasztalatok

Természetesen gyakran előfordul olyan eset, hogy két mennyiséget nem áll módunkban összemérni, például két épületet nem tudunk egymás mellé állítani. Ekkor szükség van egy közvetítő mennyiségre, amivel összemérjük mindkét összehasonlításra váró mennyiséget. Ezzel el is érkezünk a mérés szükségességéhez, valamint a mértékegység fogalmához.

A mérés során arra a kérdésre keressük a választ, hogy egy bizonyos mennyiség hányszorosa a mértékegységül választott mennyiségnek. A kapott számot mérőszámnak nevezzük. A mérés elvégzése után már nem közvetlenül a mennyiségeket hasonlítjuk össze egymással, hanem az azonos mértékegységgel kifejezett mérőszámokat.

A mindennapi életben méréssel, mértékegységek használatával kétféle szituációban találkozunk. Az egyik a fent említett helyzet, amikor ismerve a mértékegységet, egy adott mennyiséghez keressük a mérőszámot. Ez a szituáció a *megmérés*. A másik eset, amikor a mérőszám és a mértékegység ismeretében a mennyiséget kell meghatározni. Ezt *kimérés*nek nevezzük. Ha például az a feladat, hogy egy tekercsből vágjunk le 5 m hosszú szalagot, akkor *kimérést* végzünk. Ha egy adott szalag hosszát szeretnénk megtudni cm-ben, akkor *megmérésről* van szó. Hasonlóan *megmérjük* a szatyorban lévő almát, hogy megtudjuk, hány kg, de a piacon *kiméretünk* a ládából 3 kg-ot.

A mérés gyakorlati tevékenység. A méréstanítás akkor lehet eredményes, ha a tanulók ténylegesen mérnek, megismerkednek a mérőeszközökkel, megtanulják használni azokat. A mérési gyakorlatok során a fogalmi szint bővülésén túl a tanulók megtanulják a pontos, precíz munkavégzést, az eredmények pontos, áttekinthető lejegyzésének módját, és nem utolsósorban különböző mérési tapasztalattal gazdagodnak.

Fontos tapasztalat, hogy a *mérés pontossága* növelhető, ha a mennyiséget kisebb mértékegységgel mérjük. Ugyanakkor a gyakorlati életből azt is tudjuk, hogy egy adott mennyiség méréséhez szükségtelen túlzottan kis mértékegységet választanunk. Hogy mi számít túlzottan kis mértékegység-

nek, azt az adott mennyiség és a mérési feladat alapján tudjuk megmondani. Szükségtelen például két város távolságát méterben vagy egy ruha ujjának hosszát milliméterben megadni. Egy ember testmagasságáról keveset árul el, ha csak méterben adjuk meg, de milliméterben mérve sem kapunk pontosabb eredményt a napi testmagasság-ingadozás miatt. Itt a megfelelő mértékegység a centiméter.

1. példa

Karikázd be! Melyik mértékegységgel fejezzük ki

- | | |
|--------------------------|------------|
| a) két város távolságát? | km m dm cm |
| b) egy hegy magasságát? | km m dm cm |
| c) egy fa magasságát? | km m dm cm |
| d) a padod szélességét? | km m dm cm |

A mértékegység és a mérőszám kapcsolatáról két fontos tapasztalat adhat felvilágosítást:

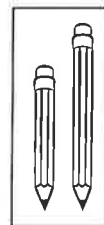
Ugyanazt a mennyiséget nagyobb mértékegységgel mérve, a mérőszám kisebb lesz. Pontosabban: ahányszor nagyobb a mértékegység, annyiad részére csökken a mérőszám. Ezt a fordított arányosságot általánosan még korai lenne az alsó tagozaton felfedeztetni (az arányosság 6. évfolyamos tananyag), de azt a tényt, hogy nagyobb mértékegységhez kisebb mérőszám tartozik könnyű megfigyeltetni.

Ugyanazzal a mértékegységgel mérve a nagyobb mennyiséghez nagyobb mérőszám tartozik. Pontosabban, ahányszor nagyobb a mennyiség, annyszor nagyobb a mérőszám. Itt egyenes arányosság áll fenn, aminek megállapítása általánosan szintén nem alsó tagozatos tananyag.

2. példa

Mérd meg a ceruzák hosszúságát előbb rózsaszín, majd piros rúddal! (3.50. ábra)

Melyik rúdból használtál többet egy-egy ceruzához? Miért? Melyik ceruza kirakásához használtál több rózsaszín, illetve piros rudat?



3.50. ábra

Megjegyzés:

A színesrúd-készlet elemei nagyon jól használhatók a hosszúságmérés és a tömegmérés alkalmi mértékegységeiként. Tekintettel arra, hogy a piros rúd kétszer akkora, mint a rózsaszín, a mérési tapasztalat nemcsak az lehet, hogy a ceru-

za megméréséhez több rózsaszín rúdra van szükség, mint pirosra, hanem az is, hogy kétszerannyi rózsaszín rúd szükséges, mint piros. Figyelnünk kell azonban arra, hogy ez csak akkor állapítható meg egyértelműen, ha a ceruza hossza piros rudakkal pontosan mérhető (pl. 20 cm). (Ha a ceruza hossza például 18 cm, akkor rózsaszín rudakkal mérve a mérőszám 9, pirossal mérve pedig 4.)

3.5.3. A becslés szerepe

A mérések tanítása során igen fontos szerepet kell kapnia a mennyiségek becslésének. A becslési kompetencia elengedhetetlen a mindennapi életben, de jó segítséget nyújt a matematikai problémák megoldásában is, hiszen a kapott eredmények ellenőrzését megkönnyítheti, ha tudjuk, hogy kb. mi lehet a reális érték.

Kezdetben, amikor a tanulók még nem minden esetben érzik a mérendő mennyiségek állandóságát, vagy kevés mérési tapasztalattal rendelkeznek, a becslés során gyakran irreleváns szempontokat is figyelembe vesznek. Néhány példa erre: Nagyobbnak gondolják a mindennapjaikban meghatározó szerepet betöltő tanító testmagasságát, mint egy másikét. Nagyobb hibával becsülik egy függőleges szakasz hosszát, mint egy vízszintesét. Eltérő alakú edényekbe ugyanannyi folyadékot öntve nem ismerik fel az űrtartalmak egyenlőségét. Nagyobb tömegűnek gondolják a gyurmagolyót, ha szétlapítják. Nehezebbnek becsülnék 1 kg vasat, mint 1 kg tollpíhét.

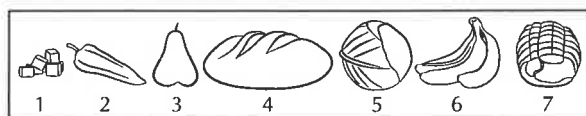
Nem csak a gyerekek becsléseiben figyelhetünk meg szubjektív vonásokat: például mi magunk is gyakran rövidebbnek érezzük a szünetet az ugyanolyan időtartamú előadásnál.

A becslési kompetencia kialakítása elsősorban úgy történik, hogy a mérés előtt megbecsültetjük a várható eredményt, majd a mérés után összehasonlítjuk a becsült és a mért értéket. Nagyon fontos, hogy a becslést kövesse a mérés, mert így szembesülnek a tanulók a becslési hibával, így várható el tőlük, hogy becslésük egyre jobban közelítse a tényleges értéket.

1. példa

Becsöld meg, hogy az alábbi élelmiszerek tömege 1 kg-nál több vagy kevesebb! Írd a megfelelő helyre az élelmiszerek sorszámát! (3.51. ábra)

- 1 kg-nál több:
- 1 kg-nál kevesebb:
- 1 kg-mal egyenlő:



3.51. ábra

Megjegyzés:

A becslés ellenőrzéséhez itt elegendő, ha megállapítjuk, melyik az 1 kg tömegű élelmiszer, és ehhez hasonlítjuk – összeméréssel – a többit. Fontos, hogy az összeméréseket ténylegesen végezzük el.

2. példa

Becsöld, majd mérd meg a különböző edények űrtartalmát deciliteres és centiliteres pontossággal! Fejezd ki a mért mennyiségeket milliliterben!

	becslés	mérés	átváltás	becslés	mérés	átváltás
pohár	dl	dl	ml	cl	cl	ml
ecsetes tál	dl	dl	ml	cl	cl	ml

Megjegyzések:

- Azzal, hogy a mért mennyiségeket mindkét esetben ugyanabba a mértékegységbe (ml) váltjuk át, nemcsak a mértékváltást gyakoroljuk, hanem azt is megtapasztalhatjuk, hogy kisebb mértékegységgel becslve, illetve mérve ugyanazt a mennyiséget, a becslés és a mérés pontosabb lehet.
- Célszerű párokban végezni a feladatokat úgy, hogy az egyik tanuló csak deciliter-, a másik csak centiliter-pontossággal dolgozik, és a munka végén közös táblázatban összehasonlítják az eredményeiket. Ezzel biztosíthatjuk azt, hogy ugyanazt a mennyiséget egymástól függetlenül valóban mind a két mértékegységgel megbecsülik és megméri.

Természetesen azt a hármas tevékenységet, amit a becslés – mérés – összevetés határoz meg, nem szükséges mechanikusan minden méréshez hozzákapcsolni. Ha a tanulók már rendelkeznek egy alapképességgel a becslések terén, akkor konstruálhatunk olyan feladatsituációkat is, amikor csak becslésre van szükség. Például becöld meg, hogy befér-e 100 liter víz egy 40 cm magas, 50 cm széles, 60 cm hosszú akváriumba. Ha egy autó 100 km-en kb. 8 liter benzint fogyaszt, kb. mennyi benzint használ el, míg Debrecenből Miskolcra él?

Vannak olyan becslési situációk, amikor korábbi tapasztalatainkra, esetleg ismert számszerű adatokra kell támaszkodnunk. Például: Milyen magas a lakótelepen lévő 10 emeletes panelház? Tudjuk, hogy egy ember magassága általában nem több, mint 2 méter, tapasztaljuk, hogy az emberek a lakásukban nem lehajolva járnak, tehát egy lakás belmagassága kb. 2 és fél méter.

Egy emelet magassága ennél több, hiszen van földem is. 3 métert számolva emeletenként egy 10 emeletes ház magassága kb. 30 méter.

3.5.4. Alkalmi és szabványmértékegységek

A mérés lényegének megértéséhez, és a 3.5.2. fejezetben leírt mérési tapasztalatok megszerzéséhez fontos lépés, hogy a mennyiségek mérését alkalmi mértékegységek használatával kezdjük, s a szabványmértékegységeket csak azután vezessük be, ha már a mérés alapvető funkciójával tisztában vannak a tanulók. Alkalmi mértékegységnek nagyon sok dolog választható. Választhatunk mindennapi tárgyakat, amelyekből sok, közel azonos méretű áll rendelkezésünkre. Például tömegméréshez gesztenyét, hosszúságméréshez gemkapcsokat vagy úrtartalom méréshez különböző méretű poharakat. Beszelnünk kell azokról a régebben használatos mértékegységekről is, amelyek az emberi testhez kötődnek. Például hosszúság-mértékegység volt az arasz, hüvelyk, láb, rőf stb. A mesékből ismert mértékegységet jelentő szavak értelmezése, ezek közül néhány használata a mérési gyakorlatok során ugyancsak hasznos lehet. Például öles fa, véka búza, akó bor, zacskó arany, szekér kincs.

1. példa

Mérd meg a levágott szalag hosszát

- világoskék rudakkal,
- gemkapcsokkal,
- hüvelykkel,
- kisarasszal!

Ugyanazt a mennyiséget különböző alkalmi mértékegységgel mérve a tanulók rájönnek arra, hogy a mérés eredményénél nem elegendő csak a mérőszám megadása, valamint arra is, hogy különböző mértékegységek használata különböző mérőszámot eredményez.

Ha olyan mértékegységet választunk, ami nem egyértelmű, például egy terem hosszát lépésekben szeretnénk kifejezni, akkor előfordulhat, hogy más mérőszámot kapunk attól függően, hogy kisebb vagy nagyobb lábú gyerek lépte le a távolságot. A probléma megbeszélése közvetlenül elvezet a szabványmértékegységek bevezetésének szükségességéhez.

A szabványmértékegységek bevezetésének igénye a történelem folyamán több alkalommal is felmerült. Eleinte egy-egy uralkodó testrészét választották mértékegységként ahelyett, hogy például minden ember saját lábának hosszával számolt volna. A ma Európában használatos egységes

SI-mértékrendszer alapjait a XVIII–XIX. században, Franciaországban fektették le. Az SI a *Système International d'Unités* francia kifejezés rövidítése, magyarul *Mértékegységek Nemzetközi Rendszere*. A jelenleg használt SI-mértékegységrendszert a 11. Általános Súly- és Mértékügyi Konferencián fogadták el 1960-ban. Az SI-mértékegységek kizárólagos használatát Magyarországon 1980-ban vezették be. Az angolszász államokban, különösen az Egyesült Államokban mind a mai napig párhuzamosan használják az SI- és az ún. történelmi mértékegységeket. Például a hosszúság kifejezésére a centiméter, a méter és a kilométer mellett megmaradt az inch, a yard és a mérföld is.

Az SI-rendszer megkülönböztet alap- és származtatott mennyiségeket. Az alapmennyiségek közül alsó tagozaton az alábbiakat tanítjuk:

- Hosszúság, alapmértékegysége: méter, jele: m.

A méter meghatározása a Föld méretéhez kötődően: 1 méter egyenlő a Föld kezdő délkörén mért területének negyvenmilliomod részével. Újabb, 1983-ban elfogadott definíció szerint 1 méter az a távolság, amit a fény vákuumban megtesz a másodperc $1/299\,792\,458$ -ad része alatt.

- Tömeg, alapmértékegysége: kilogramm, jele: kg.

A kilogramm az egyetlen SI-alapegység, amelyiknek a definíciója még mindig etalonon és nem valamilyen alapvető fizikai állandón alapszik. A kilogrammot egy nemzetközi etalon, platina-íridium ötvözetből készült, 39 mm magasságú és átmérőjű henger tömegeként definiálták. A definíció problémája abban rejlik, hogy nem az etalon lett 1 kilogrammos tömegűre elkészítve, hanem az 1 kilogramm pontosan és mindig az a tömeg, amennyi az etalon mindenkori tömegével azonos. Ezért ha az etalont például valamilyen probléma éri, megváltozhat a testek tömegének mérőszáma.

- Idő, alapmértékegysége: másodperc, jele: s.

A másodpercet régebben a Föld forgásából származtatták. Eszerint 1 másodperc a két delelés között eltelt idő $1/86\,400$ -ad része. Mai definíciónk az atomi viselkedésen alapul: A másodperc az alapállapotú cézium-133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetnek megfelelő sugárzás $9\,192\,631\,770$ periódusának időtartama.

A származtatott mennyiségek közül az űrtartalommal, a területtel, a térfogattal, valamint a szöggel találkoznak az alsó tagozatos tanulók.

- A terület és a térfogat a hosszúságból származtatható, alapmértékegységei: négyzetméter (jele: m^2) és köbméter (jele: m^3). 1 m^2 a területe az 1 m oldalú négyzetnek, 1 m^3 a térfogata az 1 m élű kockának.

- Az űrtartalom a folyékony anyag térfogatát jelenti. Alapmértékegysége: liter, jele: l. 1 liter egyenlő 1 m^3 ezredrészével ($1\text{ l} = 1\text{ dm}^3$).
- A szöget szintén származtatott mennyiségnek tekintik. Alapmértékegysége: radián, de használják a fokot is. Alsó tagozaton a szögek szabványmértékegységeivel még nem foglalkozunk.

Megjegyzés:

Megemlítünk még egy mennyiséget, a hőmérsékletet, melynek mérésével ugyancsak találkozunk a tanulók (1.6.1. fejezet). A hőmérséklet alapmennyiség az SI-rendszerben, mértékegysége a Kelvin, de a mindennapi életben a Celsius-fokot használjuk.

A szabványmértékegységek bevezetésénél szem előtt kell tartanunk a lineáris számkörbővítés (lásd 1.1.5. fejezet) lépéseit, hiszen a kiindulásként választott mértékegységek mellett csak azokat vezethetjük be az adott tanévben, melyek váltószáma benne van az éppen tanult számkörben. Ennek megfelelően 1. évfolyamon kiindulunk a méter, a kilogramm, a liter, valamint az óra fogalmából, és hozzájuk vesszük azokat a mértékegységeket, amelyeknél a váltószám 10 vagy – időmérés esetén – a 20-as számkörbe beletartozó szám. 2. évfolyamon a mértékegységek köre azokkal bővül, amelyeknél a kiindulásul választott egységhez képest a váltószám 100, vagy – időmérés esetén – a 100-as számkörbe tartozik. 3. évfolyamon az 1000 váltószámú, illetve az 1000-es számkörbe tartozó mértékegységeket vezetjük be.

3.6. A hosszúság, tömeg, űrtartalom és idő mérése

A 3.5.2. fejezetben tárgyalt általános szempontokat figyelembe véve most a konkrét mérések tanításáról lesz szó. Felsorolunk alkalmi mértékegységeket, tárgyaljuk a tanítandó szabványmértékegységeket, ismertetünk mérőeszközöket, végül bemutatunk néhány mérési feladatot.

3.6.1. Hosszúságmérés

A hosszúság, illetve távolság alkalmi mértékegységei közül iskolai körülmények között igen sokféleképpen mérhetünk.

A testrészekhez kapcsolódó mértékegységek közül leggyakrabban az alábbiakat használjuk:

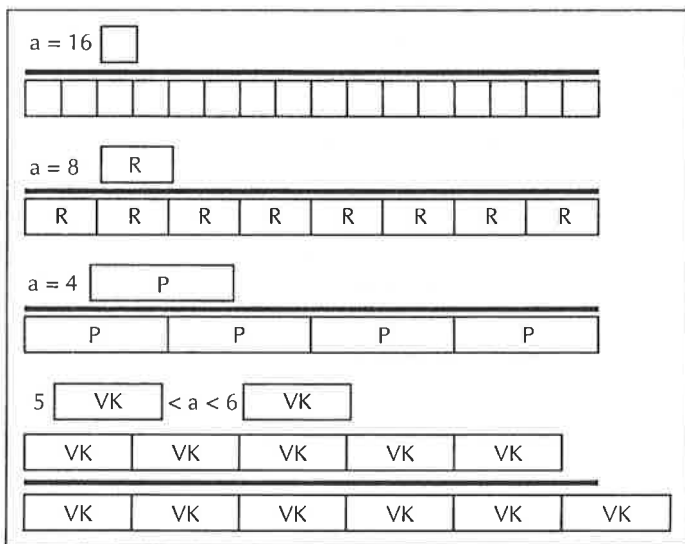
- Nagyarasz: kifeszített tenyérrel a hüvelyk- és kisujjunk közötti távolság.

- Kisarasz: kifeszített tenyérrel a hüvelyk- és mutatóujjunk közötti távolság.
- Rőf (sing): kinyújtott alsókarunk hossza a könyöktől a csuklóig.
- Hüvelyk (inch, zoll): hüvelykujjunk első ujjperce (1 hüvelyk $\approx 2,54$ cm).
- Ől: karjainkat oldalsó középtartásban kinyújtva a két középső ujjunk közötti távolság.
- Láb vagy lépés: talpunk hossza.

Mindennapi tárgyak, eszközök is lehetnek a hosszúság mértékegységei, például ceruzák, gemkapcsok, színes pálcikák, szívószálak.

Tekintettel arra, hogy az egyes színes rudak hossza között jól ismert, számszerűsíthető összefüggés van, az eszköz nemcsak hosszúságmérésre, hanem a mértékegységek és mérőszámok közötti összefüggések felfedeztetésére is kiválóan alkalmas, amennyiben a mérendő hosszúságot jól választjuk meg.

Az ábrán (3.52. ábra) látható a szakasz hosszát (16 cm) fehér kockával, rózsaszín és piros rudakkal pontosan meg tudjuk mérni. Mivel a mértékegységül választott rudak közül a piros kétszerese a rózsaszínnek, négyszerese a fehérnek, illetve a rózsaszín kétszerese a fehérnek, a kapott mérőszámok (16, 8, illetve 4) fordítottan arányosak ezekkel az alkalmi mértékegységekkel. Ha a világoskék rúddal mérünk, akkor a mérés nem lesz pontos, eredménye az, hogy a szakasz hosszabb 5 világoskék rúd hosszánál, de rövidebb 6-énál.



3.52. ábra

A színesrúd-készlet úgy készült, hogy a kis fehér kocka éle 1 cm, a narancssárga rúd hossza 10 cm, így az eszköz jól használható a szabványmértékegységek bevezetéséhez is.

A hosszúság szabványmértékegységei: méter, deciméter, centiméter, milliméter, kilométer. Bevezetésük fokozatosan történik: 1. évfolyamon a métert és a decimétert, 2. évfolyamon a centimétert, 3. évfolyamon a millimétert és a kilométert vezetjük be.

A mértékegységek közötti váltószámok: $1\text{ m} = 10\text{ dm}$, $1\text{ m} = 100\text{ cm}$, $1\text{ m} = 1000\text{ mm}$ és $1\text{ km} = 1000\text{ m}$.

A hosszúság mérőeszközei közül a tanteremben is használható a méterrúd, a mérőszalag és a vonalzó. Nagyobb távolságok méréséhez (például folyosón vagy iskolaudvaron) mérőkereket használhatunk.

3.6.2. Tömegmérés

A tömeg alkalmi mértékegységei közül kiemeljük azokat a hétköznapi tárgyakat, amelyek iskolai körülmények között használhatók. Kisebb tömegek mérése történhet például gesztenyékkel vagy más termésekkel, esetleg gyümölcsökkel. Nagybaké például olyan játékokkal (például építőkockákkal), amelyekből sok egyforma áll rendelkezésre. A színesrúd-készlet tömegmérésre is alkalmas, mert úgy készült, hogy a különböző színű rudak tömege a kis fehér kocka tömegének egész számú többszöröse. A fehér kocka tömege 1 gramm, így a szabványmértékegységekkel történő mérésnél is használható az eszköz.

Néhány nem SI tömegmértékegység:

- Mázsa: 100 kg
- Font: kb. fél kg
- Lat: a font 1 harmincketted része
- Uncia: 28-31 g
- Karát: A szentjánoskenyérfa termésének görög nevéből származik, a nemesfémek tömegének mérésére használták. $1\text{ karát} = 200\text{ mg}$.

A tömeg szabványmértékegységei: kilogramm, dekagramm, gramm, tonna. Bevezetésük fokozatosan történik: 1. évfolyamon a kilogrammot, 2. évfolyamon a dekagrammot, 3. évfolyamon a grammot és a tonnát vezetjük be.

A mértékegységek közötti váltószámok: $1\text{ kg} = 100\text{ dkg}$, $1\text{ kg} = 1000\text{ g}$ és $1\text{ t} = 1000\text{ kg}$.

A tömeg mérőeszközei a különféle mérlegek. Didaktikai szempontból a kétkarú mérleg a legmegfelelőbb, hiszen ezt használva a mérés módjáról is

információt kapunk. A mérleg két serpenyőjébe azonos tömegű mennyiséget kell tenni ahhoz, hogy a mérleg egyensúlyba kerüljön. Kétkarú mérleget vállfából is készíthetünk. Napjainkban a digitális mérlegek használata a meghatározó. Ezeknél a gyerekek csupán annyit látnak, hogy ráteesszük a tárgyra a mérendő mennyiséget, majd a kijelzőn megjelenik egy szám.

Megjegyzés:

A tömeg és a súly fogalmát a mindennapi életben gyakran keverjük. A fizika azonban világosan megkülönbözteti a két mennyiséget. Egy test súlya egyenlő a testre ható gravitációs erővel. Ezért a test súlyát úgy kapjuk meg, ha a tömegét megszorozzuk a gravitációs gyorsulással. Mivel ennek értéke közelítőleg 10 m/s^2 , azt mondhatjuk, hogy például egy 2 kg tömegű test súlya közelítőleg 20 N .

3.6.3. Űrtartalommérés

Az űrtartalom alkalmi mértékegységének választhatunk bármilyen alakú és méretű edényt, ivópoharat, kanalat, kancsót stb. A történelem során igen sokféle űrmértéket használtak. Ezek egy része italok mérésére szolgált, más része apró szemű anyagok, például gabona, takarmány mérésére.

A híg űrmérték mértékegységei közül néhány:

- Akó (borászati űrmérték): kb. 55 liter
- Pint: kb. másfél liter
- Icce: $1 \text{ pint} = 2 \text{ icce}$
- Korsó (sörös): $1 \text{ korsó} = \text{fél liter}$
- Kupica: $1 \text{ kupica} = 5 \text{ centiliter}$
- Stampedli: $1 \text{ stampedli} = 3 \text{ centiliter}$

Ún. száraz mértékek:

- Véka: faedény, kb. 31 liter
- Mérő: $1 \text{ mérő} = 2 \text{ véka}$
- Zsák

Az űrtartalom szabványmértékegységei: liter, deciliter, centiliter, hektoliter, milliliter.

Bevezetésük fokozatosan történik: 1. évfolyamon a litert és a decilitert, 2. évfolyamon a centilitert és a hektolitert, 3. évfolyamon a millilitert vezetjük be.

A mértékegységek közötti váltószámok: $1 \text{ l} = 10 \text{ dl}$, $1 \text{ l} = 100 \text{ cl}$, $1 \text{ hl} = 100 \text{ l}$ és $1 \text{ l} = 1000 \text{ ml}$.

Az űrtartalom mérőeszközei a különféle mérőpoharak, mérőhengerek, mérőkanalak, fecskendők.

3.6.4. Időmérés

Az időmérés tanításának megkezdése előtt meg kell bizonyosodnunk arról, hogy a tanulók képesek az időbeli tájékozódásra. Ismerik és értik a korábbi-későbbi, előbb-utóbb szavakat, a múlt-jelen-jövő kifejezéseket. Képesek bizonyos cselekvéssort helyes időrendbe állítani. Ezt követően az előzőekhez hasonlóan megismerkedünk a mérőeszközökkel és a mértékegységekkel.

Különbséget teszünk időpont meghatározása és időtartam mérése között. Az időpont meghatározására a különböző típusú órák szolgálnak. A mindennapi életben találkozunk például fali-, asztali-, torony- és karórával. Mindezek lehetnek analóg (mutató) vagy digitális kijelzésű órák.

Egy esemény kezdetének és végének időpontját megadva megállapítjuk az esemény időtartamát. Léteznek olyan órák is, amelyek csak időtartamot képesek mérni. Ezek a stopperok, de idesorolhatjuk a homokórát is.

Az idő szabványmértékegységei abban különböznek az SI-mértékegységek jelentős részétől, hogy a köztük lévő váltószámok nem a 10 hatványai. Tanításuk nehézsége is ebben rejlik.

1. évfolyamon megismerkedünk az óra és a nap fogalmával, a köztük lévő mennyiségi kapcsolattal: 1 nap = 24 óra. Beszélünk a napszakok elnevezéseiről is: hajnal, reggel, délelőtt, dél, délután, este, éjszaka. A napnál nagyobb időmértékegységek a hét, a hónap, az évszak és az év. A hét napjainak, a hónapoknak és az évszakoknak az elnevezése az óvodából hozott ismeret, ezt bővítjük azzal, hogy melyik hónap hány napból áll.

1. példa

Egészítsd ki a mondatokat a hét napjaival!

Mavan.

Tegnap volt.

Holnap lesz.

Tegnapelőtt volt.

Holnapután lesz.

Egy hét múlva lesz.

Összefüggések a napnál nagyobb időmértékegységek között:

1 hét = 7 nap

1 év = 4 évszak

1 hónap $\approx$ 4 hét
1 hónap $\approx$ 30 nap
1 év $\approx$ 52 hét
1 év = 12 hónap

Megjegyzés:

A hónapok és hetek, a hónapok és napok, valamint az évek és a hetek között a váltószám nem egy konkrét szám, ezért ne adjunk olyan átváltási feladatot, amelynél egyértelmű választ várunk.

2. évfolyamon a perc, míg 3. osztályban a másodperc és az év bevezetése történik meg. Összefüggések:

1 óra = 60 perc
1 perc = 60 másodperc
1 év = 365 vagy 366 nap

A naptár tanulmányozását a 2. évfolyamon kezdjük, s ekkor ismerkedünk meg a dátum fogalmával is. 3. évfolyamon jutunk el a szökőév, a szökőnap értelmezéséhez.

Ma a világ legtöbb országában a Gergely-naptárt használják, Magyarországon a XVI. században vezették be. Az évszakok és a csillagászati események nem egész számú napok szerint ismétlődnek, ezért a naptár, amely évente mindig ugyanannyi napot tartalmaz, minden évben elcsúszik a csillagászati eseményekhez képest. Ha időnként beillesztünk egy plusznapot az évbe, akkor ez a csúszás korrigálható. Ennek alapján az ún. szökőévekben, a február egy nappal hosszabb, 29 napos. A beékelődő egy napot szökőnapnak hívjuk, Julius Ceasar döntése értelmében ez nem február 29, hanem február 24. A szökőévek megállapítása a következő szabály szerint történik: minden 4. év szökőév, kivéve azokat a 100-zal osztható évszámokat, melyek 400-zal nem oszthatók. Így például 1600 szökőév volt, de 1700 nem. A XXI. század első néhány szökőeve tehát: 2000, 2004, 2008, 2012.

Az idő mértékegységeinek tanítása mellett fontos feladatunk az időpont leolvasásának megtanítása digitális és analóg kijelzésű órákról.

Könnyebbnek bizonyul a digitális óra által mutatott idő értelmezése: az órát és a percet (esetleg a másodpercet) kettőspont választja el, előbb az óra, majd a perc jelenik meg, például 13:34. A digitális óra beállítható úgy, hogy a napnak mind a 24 óráját külön kijelzi, de úgy is, hogy a délutáni órák számozását ismét 1-gyel kezdi. Ekkor a leolvasott időpontokhoz hozzátesszük, hogy „délután” vagy „este”.

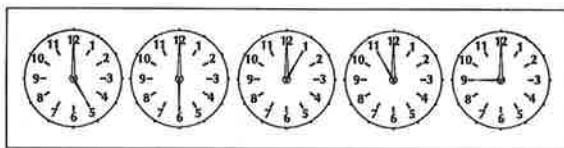
Megjegyzés:

A legtöbb digitális órán olvasható az angol rövidítés, a „p.m.” vagy az „a.m.”, ezért célszerű a tanulókkal ennek jelentését is megbeszélni.

Az analóg kijelzésű, azaz a mutatós óra működésének megértése és készségszintű használata nem egyszerű. Tanítását fokozatosan végezzük. 1. évfolyamon az egész órák leolvasását tanítjuk, megértetve, hogy a kismutató jelzi azt, hogy hány óra van, s eközben a nagymutató a 12-esen áll. Azt is megbeszéljük, hogy déli 12 óra után az óra ismét 1, 2 stb. értékeket mutat, ezeket délután 1, 2, este 9 stb. órának vagy pedig 13, 14, 21 stb. órának hívjuk.

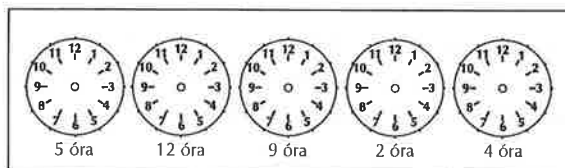
2. példa

a) Olvasd le az órákról, hogy hány órát mutatnak! (3.53.a ábra)



3.53.a ábra

b) Rajzold be az óra mutatóit! (3.53.b ábra)



3.53.b ábra

2. évfolyamon kerül sor a negyed, fél, háromnegyed kifejezések megismerésére, elkezdjük figyelni a nagymutató mellett a kismutató mozgását is. A 3. évfolyamra kell elérni az óra biztos ismeretét, tetszőleges időpont óra-perc pontosságú leolvasását.

Ahhoz, hogy az óramutatók járását a tanulók megértsék, elengedhetetlen, hogy a tanteremben legyen egy nagyméretű analóg kijelzésű falióra. Ugyancsak szükség van egy tanári demonstrációs órára, mozgatható mutatókkal, valamint minden tanulónak lennie kell saját (műanyag vagy papír) órájának, amelyen a mutatókat tetszés szerint beállíthatja.

Megjegyzés:

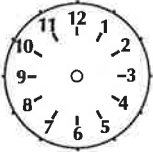
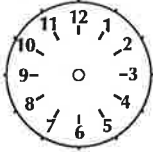
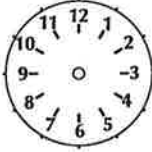
A feladatokat két irányban fogalmazzuk meg. Egyrészt kérjük, hogy konkrét mutatóállást olvassanak le, másrészt fordítva, konkrét időpontot állítsanak be a demonstrációs órán.

Az óra működésével folyamatosan kell foglalkoznunk az egész tanév során, nem szerencsés, ha csupán egy kiválasztott időszak néhány tanórán tárgyaljuk ezt a témakört, mert ekkor, noha látszólag mindenki elsajátítja az óra ismeretét, nem válik készség szintűvé a tudás. A tanév során folyamatosan van arra lehetőség, hogy egy-egy spontán feladatot adjunk a tanulóknak, olyat, amelynek megoldásához szükség van az óra számlapjának ismeretére. Például háromnegyed 9 előtt 5 perccel a hetesek kimehetnek a teremből az osztály tízóraijáért, vagy azt az utasítást adjuk, hogy egy bizonyos feladat megoldására 8 perc áll rendelkezésre.

Már említettük, hogy léteznek olyan órák (stopper, homokóra), amelyek az eltelt idő, az időtartam mérésére alkalmasak. Azonban ez nem jelenti azt, hogy a pontos időt mutató órák ne lennének használhatók az időtartam méréséhez. Ismerve egy bizonyos esemény kezdetének és végének időpontját, a kettő különbségeként megkapjuk az esemény időtartamát. Ez a kivonás nem könnyű feladat tekintettel arra, hogy az idő mértékegységeinél a váltószámok nem a tízes számrendszerhez igazodnak. Az időtartamok megállapításánál fokozatosan járunk el. Kezdetben ugyanazon egész órán belüli két időpontból számolunk időtartamot, majd pedig különböző egész órákhoz tartozó időpontokból. Tovább nehezíti a feladatot, ha több nap, esetleg hónap is eltelik a kezdeti és a végső időpont között.

3. példa

Rajzold be a mutatókat, majd egészítsd ki a mondatokat! (3.54. ábra)

		
Most délután 5 óra van. 2 óra múlva óra lesz	Most délelőtt 8 óra van. 2 óra múlva óra lesz	Most délelőtt 11 óra van. 2 óra múlva óra lesz

3.54. ábra

Az időtartamok megállapítása szöveges feladatokban:

4. példa

Édesanya süteményt készített. Hány órán keresztül dolgozott, ha 9 órakor kezdte és 11 órakor lett készen?

5. példa

Hazánkban az első gőzvasutat 1846. július 15-én adták át Pest és Vác között. Hány év, hónap és nap telt el azóta?

3.6.5. Mértékegységek átváltása

A bevezetett szabványmértékegységek közötti váltás igen nehéz feladat az alsó tagozatos tanulók számára. A nehézség matematikai szempontból abban rejlik, hogy a mértékváltás mögött a mérőszám és a mértékegység közötti fordított arányosság húzódik meg. Annak megértése például hogy $30 \text{ dl} = 3 \text{ l}$, azt jelenti, hogy fel kell ismerni, hogy a liter a deciliter tízszerese, s ezért, hogy az egyenlőség fennálljon, a 30 tizedrészét kell venni. Még összetettebb a feladat, ha azt kérjük, hogy váltsuk át például a 32 dl -t literbe. Ehhez először fel kell bontani a 32 dl -t $30 \text{ dl} + 2 \text{ dl}$ -re, majd meg kell állapítani, hogy a $30 \text{ dl} = 3 \text{ l}$, s ezután kapjuk az elvárt eredményt: $32 \text{ dl} = 3 \text{ l} + 2 \text{ dl}$.

Ha a tanulók kevés mérési tapasztalatra tettek szert korábban, s a mértékváltáshoz nem fűződik konkrét tevékenységből eredő vizuális vagy mozgásos emlékkép, akkor a mértékváltásos feladatok megoldása csupán mechanikus szabályok (váltószámok) bevézésére támaszkodó rutinmunkát jelent.

Nem célszerű mindezek miatt az átváltási feladatokat már az 1–2. évfolyamon elkezdni. Ebben az életkorban helyezzünk hangsúlyt a konkrét mérésekre, különböző mértékegységek (alkalmi és szabvány) megismerésére, használatára, valamint minél több mérési, becslési tapasztalat megszerzésére. A mértékegységek, különösen a szabványmértékegységek közötti összefüggések bevezetése 3–4. évfolyamon kezdődjön, ennek elmélyítése tovább folytatódhat az 5–6. évfolyamon, hiszen ez az az életkor, amelyben a tanulók már képesek az egyenes és fordított arányosságon alapuló összefüggések megértésére.

1. példa

Végezd el az átváltásokat!

$$a) 5 \text{ m } 7 \text{ dm } 8 \text{ cm} = \square\square\square \text{ cm}$$

$$12 \text{ m } 63 \text{ cm} = \square\square\square\square \text{ cm}$$

$$29 \text{ m } 5 \text{ dm} = \square\square\square\square \text{ cm}$$

$$1 \text{ km } 248 \text{ m} = \square\square\square\square \text{ cm}$$

$$b) 1973 \text{ cm} = \square\square \text{ m } \square \text{ dm } \square \text{ cm}$$

$$475 \text{ cm} = \square \text{ m } \square \text{ dm } \square \text{ cm}$$

$$2875 \text{ dm} = \square\square\square \text{ m } \square \text{ dm}$$

$$3758 \text{ m} = \square \text{ km } \square\square\square \text{ m}$$

Megjegyzés:

A feladat két részből áll: először nagyobb mértékegységről kisebbre, majd fordítva kell váltani. A mértékváltást kezdetben segíti, ha az üres kisnégyzetek számával utalunk a szükséges váltószámra.

2. példa

Végezd el a műveleteket a mennyiségekkel!

$$56 \text{ dl} + 17 \text{ dl} = \square\square \text{ dl} = \square \text{ l } \square \text{ dl}$$

$$127 \text{ dl} + 25 \text{ dl} = \square\square\square \text{ dl} = \square\square \text{ l } \square \text{ dl}$$

$$248 \text{ dl} - 122 \text{ dl} = \square\square\square \text{ dl} = \square\square \text{ l } \square \text{ dl}$$

$$465 \text{ dl} - 231 \text{ dl} = \square\square\square \text{ dl} = \square\square \text{ l } \square \text{ dl}$$

Megjegyzés:

A mennyiségekkel végzett műveleteknél ugyanúgy be kell tartanunk a fokozatosságot, mint a számokkal végzett műveleteknél. A tízesátlépés problémája párosulhat azzal a nehézséggel is, hogy a művelet elvégzése előtt a tagokat azonos mértékegységbe kell átváltani. (A fenti példákban ez utóbbira még nem kerül sor.)

3. példa

Egy bevásárlótáskába 2 kg 950 g tömegű élelmiszert rakunk. Van benne két csomag 125 grammos túró, 3 db 50 dkg-os kalács, 45 dkg felvágott, fél kg kenyér és egy doboz vaj. Mekkora a vaj tömege?

Megjegyzés:

A mennyiségekről szóló szöveges feladatok megoldását az nehezíti, hogy a tanulónak a szöveg értelmezése után fel kell ismerni, hogy szükség van-e mértékváltásra, és azt is neki kell eldöntenie, hogy milyen mértékegységet célszerű használni. A fenti feladat egyik megoldási módja az lehet, hogy mindegyik mennyiséget a legkisebb mértékegységben, grammban fejezzük ki, s ezután végezzük el a kapott mérőszámokkal a szükséges műveleteket. A másik, hogy először az azonos mértékegységgel (dekagramm) kifejezett mennyiségekkel számolunk, majd a kapott részeredményt és a többi mennyiséget váltjuk át grammba, s folytatjuk a műveletek elvégzését.

3.7. Geometriai alakzatok mérhető tulajdonságai

A hosszúságból származtatott geometriai mennyiségek a kerület, terület, felszín és térfogat.

A kerület és a terület síkidomokhoz, ezen belül sokszögekhez köthető fogalmak. Bevezetésüket előkészítő tevékenységek, körülkerítések, parkettázások előzik meg. A fogalmak kialakításához, megszilárdításához a különböző mérési tevékenységek járulnak hozzá. Az általános megalapozáson túl, alsó tagozaton két nevezetes négyszög, a négyzet és a téglalap kerületének és területének a kiszámítási módját tanítjuk.

A felszín és a térfogat fogalmát csupán előkészítjük, megemlítyük, a fogalmak tényleges kialakítása a felső tagozat feladata.

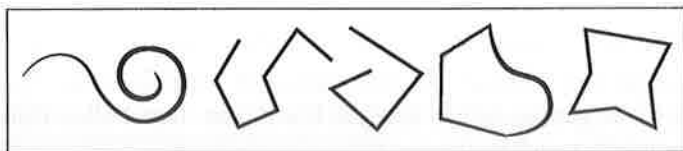
A szög ugyancsak mérhető geometriai mennyiség. Alsó tagozaton megkezdjük a fogalom kialakítását, összehasonlítjuk különböző szögek nagyságát, de a szögmérés szabványmértékegységeit még nem vezetjük be.

3.7.1. A kerület

Síkidom kerületén határoló görbéjének hosszát értjük. A kerület fogalmának előkészítését a hosszúságmérés megismerése után kezdjük. Ehhez először különböző alakú vonaldarabok hosszát mérjük meg oly módon, hogy a vonal mentén fonalat vezetünk végig, majd a fonal hosszát mérőszalaggal megmérjük. Kezdetben nyílt, majd zárt görbéket választunk, ezt követően nyílt, majd zárt töröttvonalakat.

1. példa

Mérd meg a vonaldarabok hosszát! (3.55. ábra)



3.55. ábra

Ha speciális töröttvonalakat négyzethálóra rajzolunk, hosszukat nemcsak méréssel, hanem a négyzetrács oldalainak megszámlálásával is meg tudjuk állapítani. A négyzetrács oldalhossza („lépés”) az alakzat kerületének mértékegysége. Az ilyen jellegű feladatok a kerület fogalmának kialakításán túl a síkbeli tájékozódóképesség fejlesztését is szolgálják (lásd 3.4.2. fejezet).

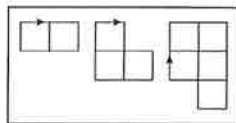
2. példa

a) Írd a nyílsorozatot az alakzatok alá! (3.56. ábra)

Hány lépésre volt szükség a sokszögek megrajzolásához?

b) Rajzolj olyan négyzetet, amelyhez 12 lépésre van szükség!

c) Keríts körül 12 négyzetrácsot a füzetedben! Számold meg, hány lépésre volt szükség! Keress több megoldást!



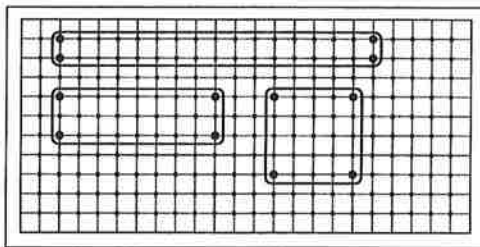
3.56. ábra

Megjegyzések:

- Az a) feladatban a nyílsorozatok megadása: $\rightarrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\leftarrow\uparrow$, $\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\leftarrow\leftarrow\uparrow\uparrow$, $\uparrow\uparrow\rightarrow\rightarrow\downarrow\downarrow\leftarrow\leftarrow\uparrow\leftarrow$. A nyilak száma a lépések számát jelenti, továbbá megfigyelhető, hogy zárt alakzatok esetén ugyanannyi nyíl mutat jobbra, mint balra, illetve le, mint fel.
- A síkbeli tájékozódóképességet tovább fejleszthetjük, ha az alakzatot is a tanulóknak kell megrajzolniuk a négy főirány szerinti lépések sorozatának lediktálásával. Például a második alakzatnál: jobbra, le, jobbra, le, balra, balra, fel, fel.
- A c) feladat már a kerület és a terület fogalmának elkülönítését készíti elő. Tekintettel arra, hogy a feltételnek nagyon sok különböző alakzat megfelel, a tanulók megoldásait összegezve tapasztalatot szereztethetünk arról, hogy azonos területű sokszögek kerülete nem azonos. Ha a megoldásokat a téglalapokra szűkítenénk, és nem 12, hanem például 16 (négyzetszám) négyzetrács körülkerítését tűzzük ki, akkor az is felismerhető, hogy az azonos területű téglalapok közül a négyzet kerülete a legkisebb.

A négyzethálóra rajzolást sok esetben kiválthatjuk a szöges-lyukas tábla alkalmazásával (3.57. ábra). Ekkor az alakzatok megrajzolása helyett szögeket tűzünk ki, és gumigyűrűvel kerítjük körül őket. Ezzel elkerüljük a rajzolás és a vonalzóhasználat okozta nehézségeket, ezért jobban tudunk a feladat tartalmi részére koncentrálni.

Miután a tanulók megismerkednek a síkidom és a sokszög fogalmával, sor kerülhet a kerület elnevezés bevezetésére. Tetszőle-



3.57. ábra

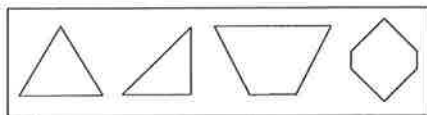
ges síkidom területét továbbra is fonal segítségével határozzuk meg. Ez a tevékenység igen fontos a fogalomalkotás szempontjából, mivel elmélyíti azt a fontos ismeretet, hogy a terület hosszúság jellegű mennyiség (hiszen mérőszalaggal mérjük meg a kifeszített fonal hosszát).

A terület mértékegységei megegyeznek a hosszúság mértékegységeivel, legyen szó alkalmi vagy szabványmértékegységről.

A sokszögek területére áttérve felismertetjük, hogy nem szükséges fonalat használnunk a megméréshez, elegendő a sokszög oldalainak hosszát megmérni, mert a terület az oldalak hosszának összege.

3. példa

Mérd meg a sokszögek oldalainak hosszúságát centiméteres pontossággal! (3.58. ábra) Számítsd ki a területüket!



3.58. ábra

A téglalap és a négyzet területének meghatározása

Megismerve a terület fogalmát általánosan, megnézzük, hogyan tudjuk azt speciális esetekben meghatározni. A téglalap és a négyzet az a két nevezetes négyszög, amelyek tulajdonságait a tanulók részletesen vizsgálják. Tudva azt, hogy a téglalap szemközti oldalai egyenlő hosszúak, valamint azt, hogy a sokszög (és így a téglalap) területe egyenlő az oldalak hosszának összegével, általános mérési, számolási eljárásokat adhatunk a téglalap területének meghatározására.

Ezeket az eljárásokat általánosan szimbólumokkal, ún. képletekkel is felírhatjuk, de a képletek különböző alakjai közötti algebrai átalakítások lehetőségére alsó tagozaton nem térünk ki. Ebben az életkorban a képlet még nem algebrai kifejezést, hanem egy számolási eljárás általánosítását jelenti. Éppen ezért más értelme van a tanulók számára a

$K = a + b + c + d$, $K = a + b + a + b$, $K = 2(a + b)$ és $K = 2a + 2b$ képleteknek. Ezeket ezért szerencsésebb nem képleteknek, hanem kiszámítási szabályoknak nevezni.

A $K = a + b + c + d$ azt jelenti, hogy egy választott körüljárási irányt követve sorban összeadjuk az oldalak hosszát.

A többi három szabály már tükrözi azt a felismerést, hogy a téglalap két-két oldala egyenlő hosszú, ezért elegendő csak a két különböző oldalnak megmérni a hosszát.

A $K = a + b + a + b$ szabály az általános eljárást tükrözi, annyi különbséggel, hogy nem szükséges mind a négy oldal hosszát megmérnünk.

A $K = 2(a + b)$ szabály szerint elegendő a két különböző hosszúságú oldal összegét megállapítani és venni annak kétszeresét.

A $K = 2a + 2b$ szabály azt mondja, hogy vegyük külön-külön egy-egy oldal hosszát, azt kétszerezzük meg, s a kapott szorzatokat adjuk össze.

Hasonló figyelemmel járunk el a négyzet területének meghatározásánál. Az általános $K = a + b + c + d$ meghatározási mód mellett áttérünk a speciális $K = a + a + a + a$, majd a $K = 4a$ szabályokra.

4. példa

A szobát parkettázzák. Milyen hosszú szegőlécre van szükség, ha a szoba 6 m hosszúságú és 4 m szélességű? Számold ki többféleképpen!

Megoldás

Lehetséges számolási módok:

$$6 \text{ m} + 4 \text{ m} + 6 \text{ m} + 4 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

$$(6 \text{ m} + 4 \text{ m}) \cdot 2 = 20 \text{ m}$$

$$4 \text{ m} + 6 \text{ m} + 4 \text{ m} + 6 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

$$(4 \text{ m} + 6 \text{ m}) \cdot 2 = 20 \text{ m}$$

$$6 \text{ m} + 6 \text{ m} + 4 \text{ m} + 4 \text{ m} = 20 \text{ m}$$

$$6 \text{ m} \cdot 2 + 4 \text{ m} \cdot 2 = 20 \text{ m}$$

stb.

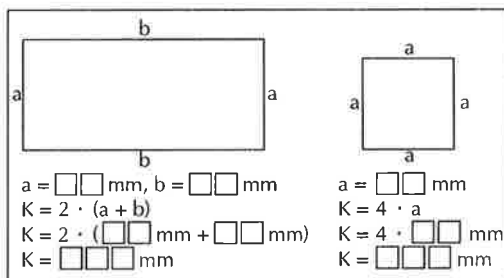
A megoldáshoz még nem szükséges az oldalakat betűkkel jelölni, a többféle számolási mód megkeresése azt jelenti, hogy többféle sorrendben adjuk össze a téglalap oldalait. Ezzel természetesen az összeadás műveleti tulajdonságainak elmélyítése mellett a kerületképlet különböző alakjainak megalkotását is előkészítjük.

5. példa

Mérd meg az oldalak hosszúságát milliméteres pontossággal! Számítsd ki a négyzet és a téglalap területét! (3.59. ábra)

Megjegyzés:

Vigyázni kell arra, hogy a korai és kizárólagos szimbólumhasználat ne homályosítsa el a



3.59. ábra

kerület fogalmának eredeti jelentését, a tanulók ne azonosítsák a kerületet a képlettel, a képletben mindig ismerjék fel a tevékenységet. Ezért kezdetben a képlet használatát előzze meg a tényleges mérés, s legyen egyértelmű, hogy a szimbólumként használt a és b betű mit jelöl.

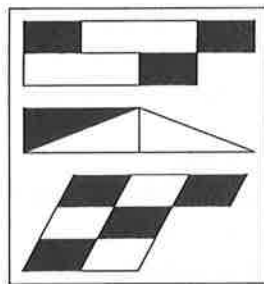
3.7.2. A terület

A terület fogalmának tevékenységekkel történő előkészítése jóval korábban megkezdődik, mint a fogalom tényleges bevezetése és használata. Az előkészítő tevékenységek között kiemelkedő szerepet kap a parkettázás és az átdarabolás. A matematika tantárgy-pedagógiában parkettázáson a sík hézagmentes, egyrétegű lefedését értjük. Parkettázni igen sokféleképpen lehet. Lehet például tetszőleges síkidomokkal, erre jó példa a kirakós játék, a puzzle. Szűkítve a parkettázáshoz használható síkidomok körét nemcsak a területfogalomhoz jutunk közelebb, hanem a síkidomok, sokszögek tulajdonságainak megismeréséhez is (lásd 3.2.1. fejezet). Célszerű kiválasztani 2-3 síkidomot (sokszöget), és ezekkel egybevágókkal parkettázni tetszőleges méretű és alakú síkrészt. Tovább szűkítve a parkettázáshoz használható elemek körét, kérjük azt, hogy egy bizonyos típusú sokszöggel végezzenek parkettázást. Például egybevágó rombuszokkal, téglalapokkal, háromszögekkel.

1. példa

Folytasd a megkezdett parkettamintákat! (3.60. ábra)

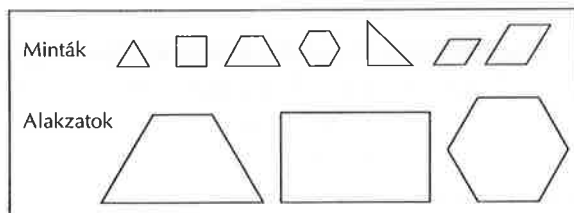
A sík parkettázása után áttérhetünk konkrét síkidomok, sokszögek parkettázására. Itt megfigyelhető, hogy a sík parkettázására alkalmas minták közül nem mindegyikkel lehet egy konkrét síkidomot hézagmentesen és egy rétegben lefedni. Így felmerülhet a minta vagy az alakzat átdarabolásának igénye is.



3.60. ábra

2. példa

Válassz az alábbi minták közül, és parkettázd vele az alakzatokat! (3.61. ábra)



3.61. ábra

Megjegyzés:

Az alakzatok és a parkettaminták megválasztásánál több szempontra is tekintettel kell lenni:

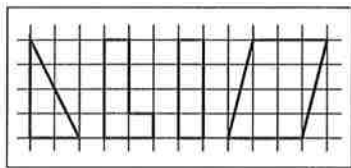
- Egy alakzat többféle mintával is parkettázható.
- Ha egy minta alkalmas a sík parkettázására, még nem biztos, hogy az alakzat is parkettázható vele.
- Egy alakzat nem feltétlenül parkettázható hozzá hasonló mintával.
- Elképzelhető, hogy az adott alakzat két hasonló parkettaminta közül csak az egyikkel fedhető le, azaz a minta alakja mellett a méretére is figyelni kell.

Alakzatok területének összehasonlítását az alakzatok átdarabolásával, fedésbe hozásával végezzük. Célszerű az átdarabolást kezdetben ténylegesen elvégezni papírból kivágott alakzatokon. Először olyan alakzatok területét hasonlítjuk össze, melyek közül az egyik könnyen átdarabolható a másikba. Utána felfedeztetjük, hogy célszerű mindkettőt úgy szétvágni, majd összeragasztani, hogy téglalapokat kapjunk. Ezeket egymásra helyezve összehasonlítható (összemérhető) a területük.

A manuális tevékenységek után az átdarabolási feladatokat négyzethálóra rajzolt sokszögekkel rajzban folytatjuk. Ekkor az átdarabolásához már nincs szükség az alakzatok kivágására, a négyzetrácsok megszámlálásával is megállapíthatjuk a kérdéses részek területeinek viszonyát. Ebben az esetben már nem közvetlen összemérést végzünk (lásd 3.5.1. fejezet), hanem alkalmi mértékegységgel (négyzettel) történő mérést (lásd 3.5.4. fejezet).

3. példa

Átdarabolással alakíts ki téglalapokat az alábbi alakzatokból, majd számozással állítsd sorba az alakzatokat területük nagysága szerint! A legkisebb területűvel kezd! (3.62. ábra)



3.62. ábra

A parkettázási és az átdarabolási tevékenység előkészíti a terület fogalmát. Egy síkidom területének meghatározásához egybevágó síkidomokkal kell parkettáznunk. A területmérés azt jelenti, hogy megállapítjuk az egybevágó parkettaminták számát. Ez a szám lesz a mérőszám, a parkettaminta pedig a mértékegység.

Természetesen a feladat így túl általános, nagyon nehéz egy-egy alakzat-

hoz megfelelő mintát találni, a legtöbb esetben csupán közelítő eredményt kaphatunk. Alsó tagozaton célszerű tehát speciális sokszögek területére szorítkozni, mértékegységként pedig lehetőleg olyan alakú sokszöget választani, amiből megfelelő számúval a sokszög lefedhető.

A területmérésnél is követjük a mérésitanítás általános szempontjait (3.5.2. fejezet). A mérőszám és a mértékegység közötti egyenes, illetve fordított arányosságról itt is szerezhethetünk tapasztalatokat csakúgy, mint a mérési pontatlanságról, tudunk alkalmi mértékegységeket is használni (3.5.4. fejezet). A területméréssel összefüggő becslési tevékenység azonban összetettebb, mint ahogyan azt az alapmennyiségek mérésénél láttuk (lásd 3.5.3. fejezet). Itt nem csupán a mérőszámot kell megbecsülni, hanem azt is, hogy milyen méretű és alakú lefedő minta (mértékegység) lesz megfelelő.

A szabványmértékegységek bevezetését azzal készítjük elő, hogy téglalapok parkettázására helyezzük a hangsúlyt, parkettamintának pedig négyzetet vagy olyan mintát választunk, amely egész számú négyzetből kirakható.

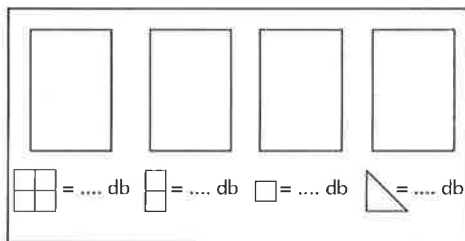
4. példa

Parkettázz! Hasonlítsd össze a parkettalapok számát! Mít tapasztalsz? (3.63. ábra)

Megjegyzés:

A feladat elvégezhető négyzethálóra rajzolt alakzatokkal is, az átdarabolást színezéssel, az összehasonlítást a négyzetrácsok meg-

számlálásával helyettesítve. Ekkor alkalmi mértékegységgel történő mérést végzünk, az összehasonlítás a mérőszámok összehasonlítását jelenti.



3.63. ábra

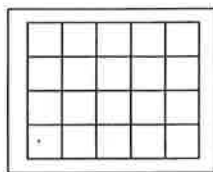
A téglalap és a négyzet területének meghatározása

A téglalap területének meghatározásához az egybevágó négyzetekkel történő parkettázás tapasztalataira támaszkodunk. Olyan téglalaphoz indulunk ki, melynek oldalai a választott hosszúságegységnek egész számú többszörösei. Így azt kell megvizsgálnunk, hogy a téglalap hány egybevágó egységnyi oldalú négyzetre bontható fel.

Először konkrét téglalapok parkettázását végezzük el. Például az 5 cm és 4 cm oldalú téglalapban el tudunk helyezni egy sorban 5 db 1 cm oldalú négyzetet, és

ilyen sorból 4-et. Tehát ez a téglalap összesen $4 \cdot 5 = 20$ db 1 cm oldalú négyzettel parkettázható. (3.64. ábra)

Általánosítva: A téglalap a oldala mentén a darab kis-négyzet helyezhető el, és összesen b darab négyzetsort tudunk kialakítani. Vagyis az a és b oldalú téglalap ab darab kisnégyzettel fedhető le. Területe tehát ab területegység. Így a téglalap területének kiszámítási módja: $T = ab$.



3.64. ábra

Az általánosítást a kerületnél leírtakhoz hasonlóan igen kis lépésekben, körültekintően kell végezni. A területképlet nem tükrözi közvetlenül a meghatározás módját, azonban ha sikerül hozzákapcsolni a négyzetekkel lefedett téglalap képét, bízhatunk abban, hogy a tanulók meglátják mögötte a terület tényleges fogalmát.

A négyzet területét a fentieknek megfelelően, a négyzet oldalainak egyenlőségét figyelembe véve adjuk meg: $T = aa$.

Az előzőekből kitűnik, hogy ahhoz, hogy sokszögek, téglalapok, négyzetek területét mérjük, nem feltétlenül szükséges a szabványmértékegységek bevezetése. Erre csak a 4. évfolyamon kerül sor.

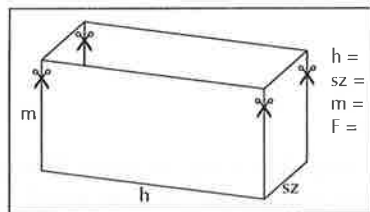
3.7.3. A felszín

A felszín fogalmát síklapú testek (poliéderek) felszínére szűkítjük le. Egy síklapú test felszínén határoló lapjainak (sokszögeinek) területösszegét értjük. A felszín meghatározásához tehát ismernünk kell a síklapú testet határoló sokszögeket. Ebben a testháló fogalmára támaszkodunk (lásd 3.1.2. fejezet). Egy síklapú testet bizonyos élei mentén felvágva és a síkba kiterítve jutunk el a testhálójához. A tevékenységet fordítva is elvégezzük: testhálóból testet hajtogatunk. A testhálón már egyértelműen látszik, hogy milyen sokszögek határolják a testet. Ezeknek a sokszögeknek a területét pedig a már ismertetett parkettázással határozzuk meg. A feladat általánosan igen nehéz, meghaladja az alsó tagozatos tanulók fejlettségi szintjét. 4. évfolyamon ezért mindössze a téglatest és a kocka testhálójával, felszínével foglalkozunk.

Különböző méretű téglatest alakú papírdobozokat terítünk ki a síkba, vagy fordítva, meghajtogatjuk papírra rajzolt testhálójukból kiindulva. A téglatest felszínének meghatározását visszavezetjük tehát téglalapok területének meghatározására anélkül, hogy a felszín képletéig eljutnánk. Hasonlóan járunk el a kocka felszínénél is. Ezek a feladatok hozzájárulnak ahhoz, hogy a tanulók a téglatest és a kocka tulajdonságait jobban megismerjék, elmélyítsék, s a térszemléletüket is fejlesszék (lásd 3.1.4. fejezet).

1. példa

Vágjuk be egy felül nyitott cipősdoboz éleit az ábrán látható módon, majd terítsük ki az asztalra. Mérjük meg vonalzóval a doboz hosszúságát, szélességét és magasságát. Számítsuk ki, hogy hány cm^2 kartonpírt használtak fel a doboz elkészítéséhez! (3.65. ábra)



3.65. ábra

Megjegyzés:

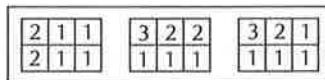
A feladattal a hosszúság, szélesség, magasság fogalmakat is gyakoroltatjuk, s megbeszéljük azt is, hogy ezek viszonylagosak, függnék attól, hogy milyen nézőpontból vizsgáljuk a dobozt.

3.7.4. A térfogat

A térfogat fogalmának kialakítását üreges testek egybevágó kiskockákkal történő kitöltésével kezdjük. Hézagmentes kitöltésre törekszünk, és felhasználjuk a területtel kapcsolatos analógiát. A felszínnél leírtakhoz hasonlóan itt is csupán a fogalom előkészítése történik. Előkészítő tevékenységként téglatest alakú dobozokat rakunk tele kiskockákkal. Ehhez elsősorban a színesrúd-készlet fehér kockáját használjuk, de építőkockák is alkalmasak lehetnek. Egyszerű mérési tapasztalatokat szerzünk: Minél kisebb kockákat használunk, annál több kell belőle, illetve nagyobb testet több kiskockával tudunk kitölteni. A hézagmentes kitöltésnél azt is megfigyeljük, hogy kiskockákból álló rétegek kerülnek egymás fölé. Nem feladata az alsó tagozatnak, hogy eljussunk a téglatest és a kocka térfogatképleteihez, sem a szabványmértékegységek megismeréséhez.

1. példa

Építsd meg fehér kiskockákból a következő testeket az alaprakozok segítségével! Számold meg, hány kockából épült 1-1 alakzat! (3.66. ábra)



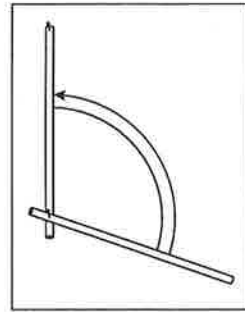
3.66. ábra

Megjegyzés:

A kapott szám a megépített alakzat térfogatának mérőszáma, a választott mértékegység pedig a fehér kiskocka.

3.7.5. A szög

A szögfogalom értelmezésére többféle lehetőség kínálkozik. A 3. évfolyamon a szöget forgásszöggént vezetjük be. Szögön két közös pontból kiinduló félegyenes által határolt síkbeli tartományt értünk, és azt vizsgáljuk, hogy az egyik félegyenes rögzítése mellett a másikat a közös pont körül forgatva mekkora tartományt sűrolunk. (3.67. ábra) Ilyen módon megkülönböztetünk pozitív (az óramutató járásával ellentétes) és negatív (az óramutató járásával megegyező) irányú szögeket csakúgy, mint a teljes körbefordulást jelentő teljes szögnél nagyobb szögeket is. A közös pontot a szög csúcsának, a félegyeneseket a szög szárainak, a közrezárt síkrészt szögtartománynak vagy röviden szögnek nevezzük.



3.67. ábra

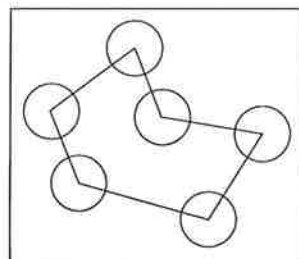
A szögek szemléltetésére használhatjuk az óramutatókat is, hiszen a két óramutató mozgásával minden időpontban meghatároz egy szögtartományt, s ez a kép jól illeszkedik a szög dinamikus fogalmához. Fontos azonban odafigyelni arra, hogy ez a kép csak akkor segítheti a szögfogalom kialakulását, ha a tanulók már készség szinten elsajátították az analóg óra működési elvét.

A fenti értelmezéssel tehát a szög dinamikus fogalmát vezetjük be, míg a sokszög szögének meghatározása a statikus szögfogalmon alapul.

A sokszög egy szögén a csúcsából kiinduló, a két oldalt tartalmazó két félegyenes szögét értjük. A két félegyenes által határolt két síktartomány közül azt tekintjük a sokszög szögének, amelyik tartalmazza a sokszöget. Nyilvánvaló, hogy a sokszög szögei a teljesszögnél kisebb szögek, és nincs jelentősége a pozitív és negatív szögek megkülönböztetésének sem. Az egyenesszöget szintén nem tekintjük a sokszög szögének, ugyanakkor megkülönböztetünk konvex vagy konkáv szögeket aszerint, hogy az egyenes szögnél kisebbek vagy nagyobbak.

1. példa

Színezd ugyanolyan színnel a csúcsok köré rajzolt köröknek a sokszögbe eső részét! (3.68. ábra)



3.68. ábra

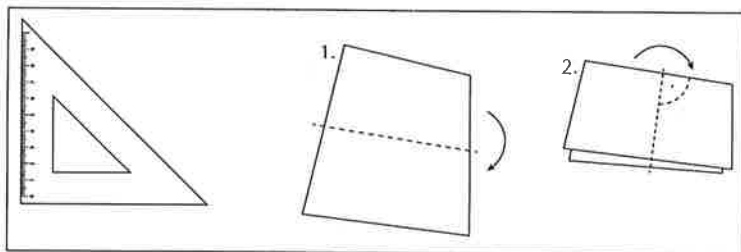
Szögek összemérése, nagyságuk viszonyítása a derékszöghöz

Alsó tagozaton még nem vezetjük be a szögmérés szabványmértékegységeit. A fok bevezetése 5. évfolyamos, a radián pedig 10. évfolyamos feladat.

A derékszög fogalmából indulunk ki, és ehhez viszonyítjuk a többi szög méretét.

Ha két metsző egyenes a síkot négy egybevágó szögtartományra osztja, akkor egy ilyen szögtartományt derékszögnek nevezünk, a két metsző egyenest pedig egymásra merőlegesnek.

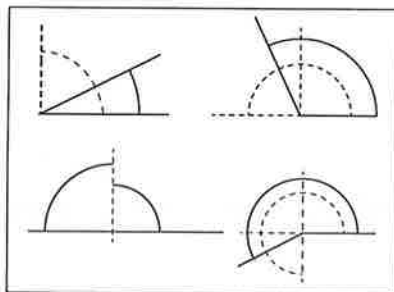
Derékszögmérésre vagy a derékszögű vonalzót használjuk, vagy papírból hajtogatással készítünk „derékszögmérőt”: a tetszőleges alakú papírlapot összehajtjuk egyszer, majd a hajtásvonal mentén még egyszer. (3.69. ábra)



3.69. ábra

A „szögmérővel” meg tudjuk állapítani a többi szögről, hogy az 1 derékszögnél kisebb vagy nagyobb: a kérdéses szög egyik szárára a csúcsból kiindulva ráhelyezzük a derékszöget. (Természetesen úgy, hogy a másik szárai ugyanabba a félsíkba kerüljenek.)

Amennyiben a szög másik szárát a derékszög takarja, nála kisebb, különben nála nagyobb szögről van szó. A derékszögnél kisebb szögeket hegyesszögeknek nevezzük. Ha két derékszöget úgy helyezünk egymás mellé, hogy csúcsuk közös, és egy-egy száruk ugyanannak az egyenesnek két különböző félegyese, a kapott szöget egyenesszögnek nevezzük.



3.70. ábra

Tompaszögről akkor beszélünk, ha az 1 derékszögnél nagyobb, de 2 derékszögnél kisebb. A 2 derékszögnél nagyobb, de 4 derékszögnél kisebb szögeket homorú szögeknek nevezzük. Ezeket az elnevezések még nem szükséges alsó tagozaton bevezetni. (3.70. ábra)

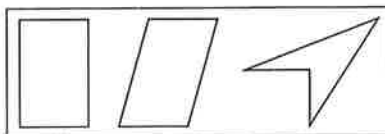
2. példa

Jelöld a négyszögek szögeit! (3.71. ábra)

A derékszög legyen piros!

A derékszögnél kisebb szög legyen kék!

A derékszögnél nagyobb szög legyen sárga!

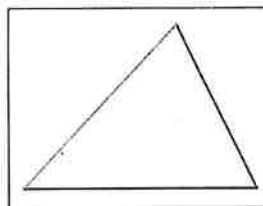


3.71. ábra

A szögek közvetlen összemérése hasonlóan történik. A két összemérendő szöget úgy helyezzük egymásra, hogy csúcsuk és egyik száruk egybeessen. (A másik szárak ugyanabba a félsíkba kerüljenek.)

3. példa

Számozással állítsd növekvő sorrendbe a háromszög szögeit! A szögek nagyságának összehasonlításában segít, ha átmásolod egy kartonra és kivágod a háromszöget!



3.72. ábra

Megjegyzés:

Gyakori hiba, hogy a tanulók a sokszögek vonatkozásában nem tesznek különbséget a csúcs és a szög fogalma között. A fenti feladat segít a két fogalom elkülönítésében is.

4. KOMBINATORIKA, STATISZTIKA, VALÓSZÍNŰSÉG

4.1. A kombinatorika tanítása

A kombinatorika az „új matematika” 1978-as reformja óta része az iskolai matematika-tananyagnak, azonban a kombinatorika tanítása még mindig sokszor háttérbe szorul, kevésbé élők a tanítás hagyományai. Különös jelentősége van annak, hogy már az alsó tagozaton tevékenységekből kiindulva tapasztalatokat szerezzenek a tanulók a kombinatorikai problémákról, mert a kései kezdés az időhiánnyal párosulva azt okozhatja, hogy konkrét tárgyi tapasztalatok nélkül, szimbolikusan közölnek tipikus megoldási módszereket, így a tanulók megértés hiányában nem képesek önállóan problémák megoldására.

A kombinatorikai problémák megoldása széles körűen fejleszti a tanulók képességeit:

- Problémamegoldó gondolkodás: egyéni stratégiák alkalmazása.
- Problémaérzékenység: a feladatok feltételei, adatai könnyen változtathatók, így kérdések, általánosítások merülhetnek fel.
- Szövegértés: a hétköznapi szövegek lefordítása a matematika nyelvére és a matematikai szövegek pontos értelmezése is jelentős. A tanulók akkor látják igazán egy adott halmaz elemeit, ha össze is tudják számolni azokat.
- Rendszerezés, kombinativitás: már az esetek felsorolásánál is meg kell találniuk a rendszert, amely megmutatja, hogy minden esetet felsoroltak.
- A gondolkodás rugalmassága: a problémákat sokszor érdemes több oldalról tekinteni, így új összefüggéseket fedezhetünk fel.
- Induktív következtetés – modellalkotás: néhány esetet kipróbálva kiputhatolhatjuk a probléma természetét, így általánosíthatunk.
- Több szempontú következtetési gondolkodás.
- Ugyanaz a matematikai modell több különböző kontextusban jelenik meg, ami segíti a modell felismerését.

A kombinatorikai feladatok behálózják az egész matematika-tananyagot, így az a helyes, ha minden témakörben találkoznak a tanulók kombinatorikai példákkal. Néhány tipikus probléma, megoldási módszer kedvéért azonban érdemes külön is foglalkozni a kombinatorikai feladatokkal.

Az iskolai kombinatorikai feladatok általában bizonyos dolgok összeszámlálására vonatkoznak, azaz adott véges halmaz elemszámát kell megadni.

Az összeszámlálási feladatok annyira sokfélék, hogy a kombinatorikai problémák megoldásánál nem az a lényeges kérdés, hogy megtaláljuk, melyik ismert modell (ismétlés nélküli permutáció, variáció stb.) felel meg a szövegnek. Ehelyett vannak olyan kérdések, amelyeket feltéve a tanulók segítséget kaphatnak a probléma sikeres megoldásához.

Két fő kérdést kell az összeszámlálási problémák megoldásakor folyamatosan figyelni:

- Különböző eseteket számoltunk össze?
- Minden esetet összeszámloltunk?

Kezdetben az esetek megkülönböztetését kell gyakorolniuk a gyerekeknek az összes eset felsorolásának igénye nélkül. Azonos esetek kiválasztása még később is okozhat nehézséget, például amikor kerek asztal köré ülnek le néhányan, és azokat az elrendezéseket nem tekintjük különbözőnek, amelyek forgatással egymásba átvihetők.

Később az összes eset felsorolásának igénye arra is neveli a tanulókat, hogy a matematikafeladatok megoldásánál egy megoldás megtalálásakor nem mindig vagyunk készen, az összes megoldást meg kell keresni.

A kombinatorika tanításának szintjei

Alsó tagozaton a tanulók fejlődési szintjeinek megfelelően a kombinatorikai feladatok egymásra épülő szintjei a következők:

- Az esetek megkülönböztetése
- Az összes eset felsorolása ötletszerűen
- Rendszeres felsorolás
 - » Reprezentációk: képi – szimbolikus (rajzok, betűk, táblázat, gráf)

Felső tagozaton, majd középiskolában a kombinatorika tanítását a következő szinteken folytatjuk tovább:

- Formális módszerek alkalmazása különböző stratégiákon keresztül:
 - » szorzás,
 - » összeadás,
 - » kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés,
 - » komplementer,
 - » rekurzió stb.
- Struktúrák felismerése

A tanítónak ismernie kell a megoldási módszereket és azok fejlődésének egész folyamatát, hiszen eszerint tud megfelelő szintű mintákat mutatni

a tanulóknak. Egyrészt a gyerekeknek való megoldásokat kell tanítaniuk, másrészt a magasabb szintű módszerek ismeretében gyorsabban átlátják a problémákat, és jobban tudnak változatos típusú feladatokat válogatni a tanításhoz.

A feladatok szintekbe való besorolásánál figyelembe kell venni, hogy a feladatok minőségileg nehezednek, ha növeljük az elemszámot, hiszen ekkor a felsorolás helyett már formális módszereket kell alkalmazni.

A kombinatorikai feladatokban különböző válogatási szempontok határozzák meg azt a halmazt, amelynek az elemszámát keressük. A gyerekeknek nehézséget okoz több szempont együttes figyelése, ezért fokozatosan kell növelni a figyelembe veendő szempontok számát. Óvatosan kell eljárni, hiszen a kevesebb szempont esetén viszont sokszor nagyobb az elemszám. Például:

1 szempont: kétjegyű számok száma (90 db).

2 szempont: kétjegyű páros számok száma (45 db).

3 szempont: kétjegyű páros számok száma, amelyekben van 5-ös számjegy (5 db).

4 szempont: kétjegyű páros számok száma, amelyekben van 5-ös számjegy és oszthatók 3-mal (1 db).

4.1.1. Az esetek megkülönböztetése

A különböző esetek felsorolására vonatkozó egyszerű feladatokat már az óvodában kaphatnak a gyerekek (például zászlók különféle színezései), ami az 1–2. évfolyamon folytatódik az összes eset felsorolási igényének fokozatos bevezetésével.

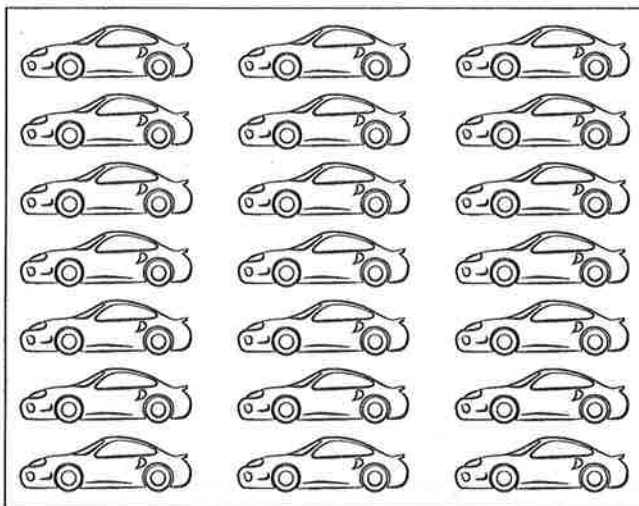
A feladatokban mindig pontosan meg kell fogalmazni, melyek azok az esetek, amelyeket különbözönek tekintünk.

1. példa

Egy izgalmas autóverseny során három autó, egy sárga, egy piros és egy kék előzgette egymást, így sorrendjük mindig változott.

a) Színezzük az autókat a lehetséges sorrendek szerint! (4.1. ábra) Két sorrend különböző, ha azokban van olyan autó, amelyik nem ugyanazon a helyen áll. (Több rajz van, mint lehetőség.)

b) Mi volt a végső sorrend, ha tudjuk, hogy nem a piros nyert, viszont megelőzte a kékét?



4.1. ábra

Megjegyzések:

- A gyerekeknek kezdetben el kell magyarázni, mit jelent egy eset. Az autós példában három egymás utáni autó, melyek közül egy sárga, egy piros és egy kék.
- A megoldást szemléltethetjük játék autókkal, bár az nem pótolja a színezést, hiszen egyszerre kell látnunk az esetek felsorolását. Figyeljük meg, hogy a konkrét tárgyakkal való kirakásnál gyakran cserélgetéssel találunk új eseteket a gyerekek. A színezésnél pedig a gyerek számára szempont lehet, hogy minél kevesebbszer kelljen letenni a ceruzát közben, például amit csak lehet, kiszíneznek pirossal, azután kezdenek más színnel színezni.
- A tárgyakkal való szemléltetés akkor szerencsés igazán, ha annyi tárgy áll rendelkezésre, hogy az összes esetet egyszerre ki tudjuk rakni.
- Az összes esetet célszerű közösen összegyűjteni kirakással akkor is, amikor ez még nem tantervi követelmény a gyerekek számára.
- Hasznos az egyes esetek azonosításának gyakorlása szóban is, például: „Az én autóim olyan sorrendben vannak, hogy a sárga megelőzi a kékét, de lemaradt a piros mögött.” Az ilyen kijelentéseket játékosan is gyakorolhatjuk, például a kijelentés alapján kell a másik játékosnak kirakni az autókat, vagy barkochbázhatunk is, eldöntendő kérdések alapján kell az egyik játékosnak kitalálni, hogy melyik lehetőségre gondolt a másik.
- Előkészíthetjük a rendszerezést olyan utasításokkal, mint például: Sorolj fel olyan eseteket, amikor a piros autó vezet!

- Az „eset” szó helyett sokszor jobb a „lehetőség” szó használata, például amikor szétválasztunk eseteket, és külön-külön vizsgáljuk a lehetőségek számát (lásd 1.1.4. fejezetben a 4. példát). Viszont ne használjuk a variáció, kombináció szavakat általánosan a lehetőségekre, mert ezeknek a kombinatorikában más jelentése van.
- Jellemző a kombinatorikai feladatok értelmezésére, hogy a gyerekeket először zavarja az a bonyolult mondat, amely az esetek különbözőségére utal, később azonban maguk teszik fel ezt kérdésként. Ha lehetőségünk van, várjuk meg ezt a kérdést, vagy ösztönözzük, hogy tegyék fel. Gyakori hiba, hogy a gyerekeket meg akarják kímélni az esetek megkülönböztetését meghatározó mondatától, így pontatlan feladatot adnak nekik. A kicsi gyerekeknek sem lehet pontatlanul megfogalmazni a problémákat!
- A fenti példát sok más tárgyra át lehet fogalmazni, amelyekkel kirakhatók a különböző lehetőségek. Például különböző színű kupakkal (a színes műanyag üvegkupakok gyűjtése egyébként is hasznos, nagyon sok mindenre használhatók), betűkártyákkal (például a T, É, R betűket rakjuk különböző sorrendbe, keressünk értelmes és értelmetlen szavakat!), színes pálcikákkal.

4.1.2. Az összes eset felsorolása ötletszerűen

Megjelenik az összes eset felsorolásának igénye, de még hiányzik a rendszer annak indoklásához, hogy valóban megtaláltuk az összes esetet. A tanító lehetőleg rendszerben sorolja fel a különböző eseteket, de ezt még ne várja el a gyerekektől.

1. példa

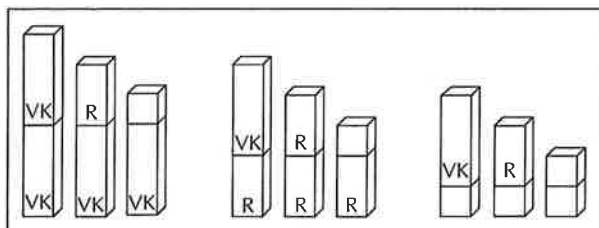
A színesrúd-készlet fehér, rózsaszín és világoskék rúdjaikat használjuk. Építünk utcát olyan házakból, amelyek két egymás tetejére állított rúdból állnak! Az utcában különböző házak legyenek! Két ház különböző, ha valamelyik részének (alsó vagy felső) a színe eltérő.

Megjegyzések:

- Beszéljük meg, hogy például egy rózsaszín és egy világoskék színű rúdból két különböző házat tudunk építeni a két rúd sorrendjétől függően.
- Tisztázzuk, hogy egy ház két azonos színű rúdból is állhat!
- Nézzük meg a különböző utcákat, és emeljük ki azokat, amelyeknél látszik a rendszerezés. Például a 9 lehetőség úgy van felsorolva, hogy

egymás mellett van 3-3 ház, amelyeknek az alsó szintje ugyanolyan színű, és a felső változik. (4.2. ábra)

- A rudakhoz a hosszuknak megfelelő számot rendelve a példát lefordíthatjuk az összeadás nyelvére, és megkereshetjük az azonos magasságú házakat, amelyek az összeadás felcserélhetőségére mutatnak példákat.



4.2. ábra

4.1.3. Rendszeres felsorolás

Egyes kutatók szerint az esetek rendszeres felsorolása már csak a formális műveletek szakaszában várható el a gyerekektől. Azonban ez függ a probléma bonyolultságától. Ha a feladatban csak egy-két szempont változik, nem kell túlságosan sok lehetőséget felsorolni, és a gyerekeknek megfelelő tapasztalataik vannak, akkor már a 3–4. évfolyamon képesek a rendszerezésre.

A rendszerezés leghatékonyabb stratégiája egy-egy dolog rögzítése és a többi változtatása, amire a gyerekek megfelelő rávezető játékok során maguk is rájönnek.

Az összes lehetőség felsorolását, rendszerezését segítő játék tetszőleges összeszámlálási feladatra:

A gyerekek csoportban játszanak, a soron következő játékosnak egy új esetet kell kirakni, ha sikerül, kap 1 korongot, ha passzol, akkor nem kap korongot, ha pedig olyat rak, ami már szerepelt, akkor visszaad egy korongot. Ha már sokan nem tudnak rakni, akkor elkezdik úgy rendezni a kirakott eseteket egy elem rögzítésének stratégiájával, hogy látszon, van-e több eset, és mi lehet az.

A rendszerezés stratégiái: csere, rögzítés, ciklikusság.

A gyerekeknek meg kell tanítani a rendszerezés ábrázolását, a tárgyi reprezentációk után a képi reprezentációkat. A képi reprezentációk lehetnek rajzok, betűk, táblázat, gráf.

Táblázattal rendszerezés két szempont szerinti változás esetén

1. példa

Hányféle kétgombócos fagyaltot kérhetünk, ha a fagyizóban már csak háromféle fagyalt van, eper, csokoládé, vanília, és a tölcserben a gombócok sorrendje is számít?

A gyerekekkel vágjunk ki tölcseket és színes korongokat gombócoknak (a gombócokat helyettesíthetjük színes kupakkokkal). Ezekből rakjuk ki az összes esetet, és rendszerezzük őket.

Ezután ábrázoljuk táblázatban az eseteket úgy, hogy az oszlop az alsó, a sor a felső gombócot jelentse, egy mező pedig egy lehetséges fagyaltot:

	eper	csokoládé	vanília
eper	 	 	 
csokoládé	 	 	 
vanília	 	 	 

Megjegyzések:

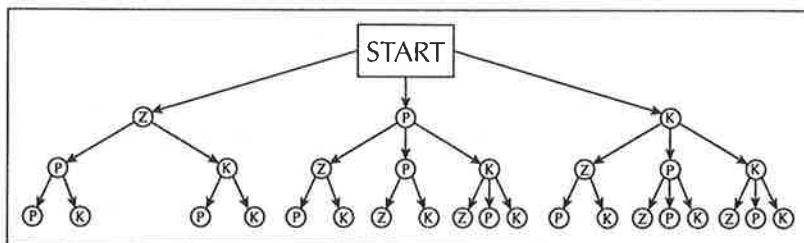
- A lehetséges fagyaltok száma annyi, ahány mező van a táblázatban, azaz 9.
- A táblázatból jól leolvasható az esetek száma akkor is, ha a fagyaltban a gombócok sorrendje nem számít (6 db), és akkor is, amikor nem engedjük meg, hogy két azonos színű gombóc legyen (6 db).
- A rendszerezés elve: rögzítjük az alsó gombóc fajtáját, utána változtatjuk a felső gombócot, majd végignézzük, hányféleképpen lehetett rögzíteni az alsó gombóc fajtáját.

Gráffal rendszerezés két vagy több szempont szerinti változás esetén

2. példa

Egy zsákban 1 zöld, 2 piros és 3 kék színű, egyforma méretű gyöngy van. A zsákból sorban húzunk három gyöngyöt és felfűzzük egy láncra. Hányféle láncot kaphatunk?

Az első, a második és a harmadik húzás eredményét ábrázoljuk gráffal (ágrajzzal)! Háromféleképpen rögzíthetjük az elsőre kihúzott golyó színét, utána vesszük számba a többi lehetőséget. (4.3. ábra)



4.3. ábra

Megjegyzések:

- Tudatosítsuk a tanulóban, hogy a gráfon egy eset azt jelenti, hogy a starttól a nyilak mentén végigsétálunk a gyöngyökön az elsőtől a harmadik gyöngyig.
- Gyakran jobban láthatók az esetek, ha a nyilakat nem föntről lefele, hanem balról jobbra haladva rajzoljuk, így a különböző eseteket is balról jobbra olvashatjuk le (például ha egy szám számjegyeit választjuk a százasként kezdve, balról jobbra leolvasható a szám).
- A színeket célszerű mindig ugyanabban a sorrendben rajzolni, így kisebb annak a lehetősége, hogy kihagyjuk valamelyiket (a fenti példában a kötött sorrend: zöld – piros – kék).

4.1.4. Formális módszerek alkalmazásának előkészítése

Ezen a szinten is néhány eset felírásával és a rendszer megtalálásával kezdődik a feladat, de most már nem szükséges minden esetet felsorolni, szorzással, összeadással rövidebben megkaphatjuk az esetek számát. A formális módszerek alkalmazása nem alsó tagozatos feladat, de előkészítését megkezdhetjük.

Szorzási módszer

1. példa

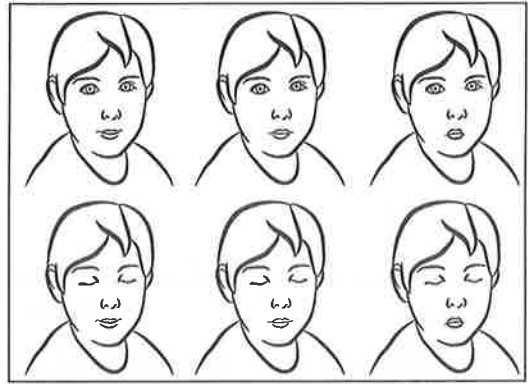
Panni matricás füzetében különféle szemeket, orrokat, szájakat lehet a fejeknek ragasztani, így különböző arcokat lehet összerakni. Hányféle arcot rakhat össze Panni, ha 2-féle szem (nyitott, csukott), 3-féle száj (egyenes, mosolygós, szomorú) és

a) egyféle orr van?

b) kétféle orr van (egyenes, krumpli)?

Megoldás

a) Rajzoljuk le először azokat az arcokat, amelyek nyitott szeműek: 3 ilyen van, mert a szája lehet mosolygós, egyenes vagy szomorú. A csukott szemű arcokból is ugyanígy 3 van, tehát a lehetőségek száma: $3 + 3$. (4.4. ábra) Szorzással: A lehetőségek száma: $2 \cdot 3$, mert 2-féleképpen választhatjuk a szemet, és akármelyik szemet választottuk, mindenképpen 3-féle száját választhatunk hozzá.



4.4. ábra

b) Az előző 6-féle arc mindegyikét rajzolhatjuk egyenes és krumpliorral is, így $6 + 6 = 12$ -féle arcot rajzolhatunk. Szorzással: $2 \cdot 3 \cdot 2$, mert 2-féleképpen választhatjuk a szemet, és akármelyik szemet választottuk, mindenképpen 3-féle száját választhatunk hozzá, ezután mindegyik rögzített szemhez és szájhoz 2-féle orr tartozhat.

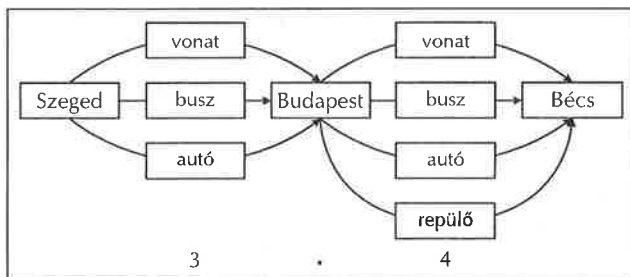
Megjegyzések:

- Alsó tagozaton mindig a táblázatos vagy gráfos ábrázolással párhuzamosan végezzük el a szorzást!
- Két szempont változása esetén az ilyen típusú kombinatorikai feladat a szorzás fogalmának elmélyítésére is szolgálhat (lásd 1.2.3. fejezet).
- Sok példa megoldásával és a gráfos ábrázolás megtartásával érhetjük el, hogy a gyerekek lássák, mikor szorozhatnak és mikor nem. Például az előző golyós példánál nem lehetett volna szorozni.
- A szempontok számát fokozatosan lehet csak növelni! A példában először csak a szem-száj változhatott, később az orr is.

A gráfos ábrázolás nem mindig jelenti az esetek felsorolását:

2. példa

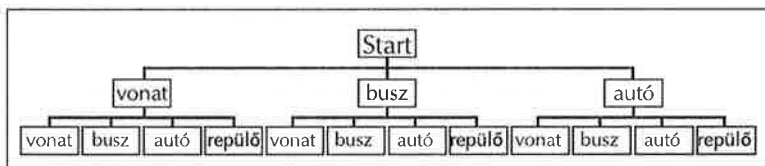
Szegedről Budapestre eljuthatunk vonattal, busszal vagy autóval, Budapestről Bécsbe vonattal, busszal, autóval vagy repülővel. Hányféle közlekedési eszközzel juthatunk Szegedről Bécsbe, ha Budapesten bármelyik közlekedési eszközről bármelyikre átszállhatunk? (4.5. ábra)



4.5. ábra

A példában a gráf a közlekedési eszközök lehetőségeit szemlélteti az egyes útvonalakon. Szeged és Budapest között bármelyik nyílon haladhatunk a 3 nyíl közül, ezután Budapest és Bécs között bármelyik nyílon haladhatunk tovább a 4 nyíl közül. Így lesz $3 \cdot 4 = 12$ a lehetőségek száma.

Az összes lehetőség gráfja (4.6. ábra):



4.6. ábra

Összeadási módszer

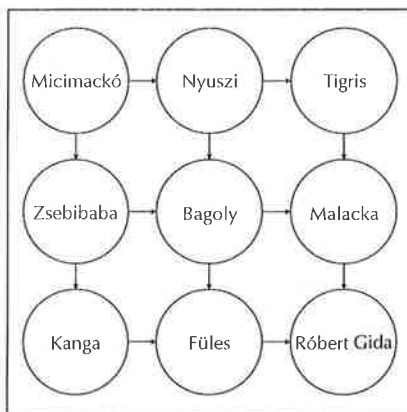
Útvonalak összeszámlálása

3. példa

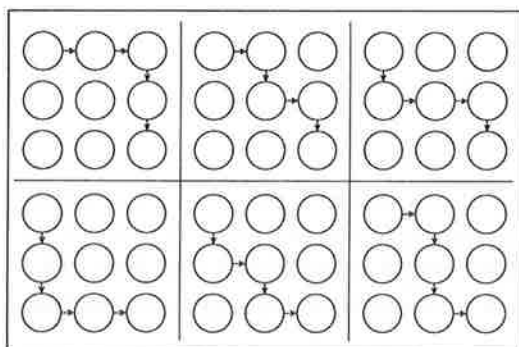
Micimackó otthonából indulva a legrövidebb úton akar eljutni Róbert Gidához úgy, hogy közben három barátját meglátogatja. Játsszuk le az összes lehetséges útvonalat, és rajzoljuk be egy-egy ábrába! (4.7. ábra)

Megoldás

A példa szövegében a legrövidebb útvonalat az jelenti, ha Micimackó pontosan három barátját látogatja meg. A barátok neve az útvonalak meghatározását is szolgálja. (4.8. ábra)



4.7. ábra

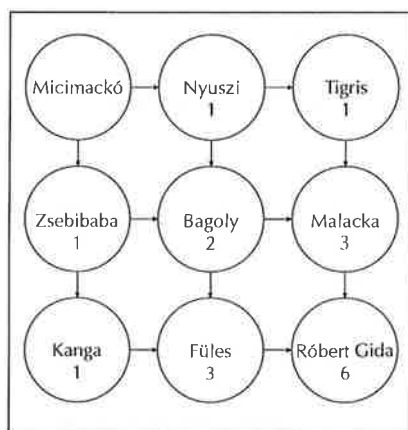


4.8. ábra

A példában megfigyelhető az összeadási módszer: Róbert Gidához csak Fülestől vagy Malackától juthat Micimackó. Mivel Füleshöz és Malackához is 3-féle útvonalon mehet, így Róbert Gidához összesen $3 + 3 = 6$ -féleképpen juthat a lakásától Micimackó.

Megjegyzés:

Minden állomáshoz beírhatjuk az oda-jutás lehetőségeinek a számát. A felső sor és a bal oldali oszlop állomásaiba 1-1 úton juthatunk. Egy-egy újabb állomást fentről és balról érhetünk el, ezért itt a lehetőségek száma a két előző állomáshoz írt szám összege lesz. Például Micimackó Fülesig Kangán (1 lehetőség) és Bagolyon (2 lehetőség) keresztül $1 + 2 = 3$ -féleképpen juthat el. (4.9. ábra)



4.9. ábra

Esetek szétválasztása

A problémamegoldás fontos, de sokszor nem könnyű lépése a probléma részekre bontása és az így egyszerűbbé vált részek megoldása külön-külön.

4. példa

Hány háromjegyű páros számot alkothatunk a 0; 1; 2; 4 számkártyák felhasználásával?

Megoldás

Válasszuk szét az eseteket aszerint, hogy a 0 az egyes helyi értékre kerül vagy nem.

1. eset: Ha a 0 az egyes helyi értékre kerül.

A 0-ra végződő háromjegyű számok: 120; 140; 210; 240; 410; 420.

2. eset: Ha az egyes helyi értékre a 2-es vagy a 4-es számkártya kerül.

A 2-re végződő háromjegyű számok: 102; 142; 402; 412.

A 4-re végződő háromjegyű számok: 104; 124; 204; 214.

Összesen $6 + 4 + 4 = 14$ megfelelő háromjegyű szám lehet.

Megjegyzések:

- A feladatban konkrét számkártyák szerepelnek. Ez azt is jelenti, hogy a háromjegyű számokban nem fordulhat elő két azonos számjegy.
- A számok rendszeres felsorolását általában megkönnyíti, ha a számjegyek növekvő sorrendjében vesszük sorra az eseteket, a fenti példában: 120; 140; 210; 240; 410; 420.
- A példa különböző elemek kiválasztását kívánta sorrendben, ismétlődés nélkül egy korlátozó feltétellel.

Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés

5. példa

Peti akváriumában 3 hal lakik, Pinty, Punty és Panty. Peti belemeríti a halfogó hálóját az akváriumba, és kiemeli. Hányféle eredménye lehet a halászatnak?

Megoldás (1)

Esetszétválasztást végzünk: A lehetőségeket felsoroljuk a kihalászott halak száma szerinti rendszerben, így 3 esetet különböztetünk meg:

0 hal: 1 lehetőség

1 hal: 3-féleképpen választható ki ez a hal (Pinty, Punty, Panty): 3 lehetőség.

2 hal: 3-féleképpen választható ki az akváriumban maradó hal (Pinty maradt, akkor Puntyot és Pantyot húzta ki; Panty maradt, akkor Pintyet és Puntyot húzta ki; Punty maradt, akkor Pintyet és Pantyot húzta ki): 3 lehetőség.

3 hal: mindegyik halat kihúzta: 1 lehetőség.

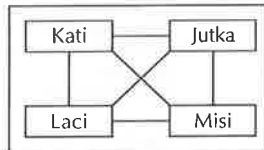
Összesen: $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ lehetőség.

Megoldás (1)

A gyerekek számára a hasonló feladatok megoldása könnyebb, ha az emberekhez neveket rendelünk hozzá. Legyenek: Kati, Jutka, Laci, Misi. A koccintásokat a gyerekekkel játsszuk el, közben számoljuk a koccintásokat (ekkor természetesen az aktuális nevekkal dolgozunk). A tevékenység közben a gyerekek megtalálják az összeszámlálásnak a rendszerét.

Megoldás (2)

A rajzon a koccintásokat egy-egy szakasszal jelöljük. Behúзва az összes lehetséges szakaszt, kapjuk, hogy a 4 ember között 6 koccintás történt (4.10. ábra):



4.10. ábra

Megoldás (3)

A koccintások lejátszásával a rekurzív megoldás természetesen adódik:

Először Kati koccint Jutkával: 2 ember 1 koccintás

Utána Laci koccint Katival

és Jutkával: a 3. ember az előzőekkel + 2 koccintás

Végül Misi koccint Lacival,

Katival és Jutkával. a 4. ember az előzőekkel + 3 koccintás

Összesen $1 + 2 + 3 = 6$ koccintás.

A rekurzió itt azt jelenti, hogy egy újabb ember koccintásakor megszámláljuk, hogy az előző koccintásokhoz hány új koccintás jön hozzá.

4.1.5. Példák különböző kombinatorikai struktúrákra

A struktúrák felismerése és a feladatoknak ezek alapján való megoldása csak a középiskolás tanulóktól várható el. Az egyes struktúráknak megfelelő egyszerű problémákkal azonban már az alsó tagozatos tanulók is találkozhatnak. Fontosnak tartjuk azt, hogy a tanító tisztában legyen az adott probléma kombinatorikai struktúrájával, és tudatosan válogasson a különböző típusú feladatok közül.

Sorba rendezések ismétlődés nélkül (ismétlés nélküli permutációk)

1. példa

a) Az 1; 2; 3 számkártyákból hányféle háromjegyű számot lehet összerakni?

b) Az 1; 2; 3; 4 számkártyákból hányféle 4-gyel kezdődő négyjegyű számot rakhatunk össze?

Megoldás (2)

A feladat átfogalmazása: mindegyik halat vagy kihalássza, vagy nem, ez minden hal esetén 2 lehetőség. Minden halhoz írjunk + jelet, ha kihalássza Peti, és – jelet, ha nem halássza ki.

Soroljuk fel rendszerben az összes lehetőséget:

Pinty	–	–	–	–	+	+	+	+
Punty	–	–	+	+	–	–	+	+
Panty	–	+	–	+	–	+	–	+

Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van a halászat lehetséges eredményei és a 3 jel lehetséges sorozatai között, ahol mindegyik jel lehet akár +, akár – jel.

Megjegyzés:

A példa jól mutatja, hogy egy problémát többféle módon is megoldhatunk, erre a kombinatorikai feladatok jó lehetőségeket adnak.

Komplementer halmaz elemszámának meghatározása

Gyakran egyszerűbb a rossz esetek összeszámlálása és kivonása az összes eset számából.

6. példa

Egy piros és egy zöld dobókockával dobunk. Hányféleképpen lesz a dobott számok szorzata páros?

Megoldás

A „rossz” esetek azok, amikor a szorzat páratlan, ez akkor következik be, ha mindkét dobott szám páratlan: $3 \cdot 3 = 9$ lehetőség. Két kockával összesen $6 \cdot 6 = 36$ -félét dobhatunk, így a szorzat $36 - 9 = 27$ esetben páros.

Rekurzió

A lehetőségek összeszámlálását kisebb elemszámmal kezdjük, és ezt felhasználva lépünk a következőre.

7. példa

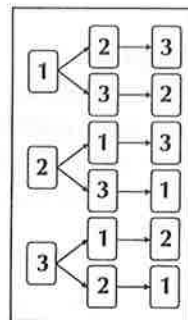
Egy 4 fős társaság születésnapot ünnepel, mindenki koccint mindenkivel. Hány koccintás történt?

- c) Az 1; 2; 3; 4 számkártyákból hányféle négyjegyű számot rakhatunk össze?
 d) Hányféleképpen rakhatjuk le az 1; 2; 3; 4 számkártyákat úgy, hogy pontosan 3 számkártya balról annyiadik helyen áll, amelyik szám áll a kártyán?

Megoldás

- a) Háromjegyű számot kell összeállítani 3 számkártyából, így minden számkártyát fel kell használni, és a számkártyák különböző sorrendje különböző számot ad.

A lehetőségeket gráffal ábrázolva látható, hogy összesen 6 db háromjegyű szám alkotható. (4.11. ábra)



4.11. ábra

- b) Most is ábrázolhatnánk a lehetőségeket gráffal, de az a) feladat eredményét figyelembe véve adódik, hogy ha az ezres helyi értékre letesszük a 4-es számkártyát, ezután az 1; 2; 3 számkártyákat 6-féle sorrendben rakhatjuk le, így a lehetőségek száma 6.

Ez a kérdés előkészíti az áttérést a 4 különböző számkártya esetére, és sugallja az egy kártya rögzítésének stratégiáját.

- c) Mivel az ezres helyi értékre 4-féleképpen választhatunk számkártyát, minden választás után a megmaradt 3 számkártyát 6-féle sorrendben rakhatjuk le, így a lehetőségek száma: $4 \cdot 6 = 24$.
- d) A példa megértéséhez feltétlen szükséges a kártyák konkrét kirakása. Például az 1; 4; 3; 2 sorrend esetén pontosan két kártya, az 1-es és a 3-as van a helyén. Játsszuk el a problémát a kártyákkal! Keverjük meg a számkártyákat, rakjuk sorba, és számoljuk meg, hány van a helyén. Végezzünk 10 kísérletet, előtte tippeljük meg, hogy a 10 közül hányszor lesz 0; 1; 2; 3; 4 kártya a helyén. A tevékenység során felfedeztetjük, hogy nem lehetséges, hogy pontosan három kártya álljon a helyén: ha három a helyén van, akkor a negyedik kártya és az ő helye marad ki, tehát a negyediknek is a helyére kell kerülnie.

Megjegyzés:

A számok összeállítása számkártyákból hozzájárul a számok helyi értékes írásmódjának megértéséhez (lásd 1.1.5. fejezet).

Sorba rendezés ismétlődéssel (ismétléses permutáció)

2. példa

Hányféle sorrendben írhatók le a következő nevek betűi?

PALI; LALI; LILI;

Megoldás

A lehetőségeket mindegyik név esetében soroljuk fel rendszerben (táblázatban vagy gráffal). A felsorolásokat megvizsgálva összefüggéseket kereshetünk a különböző esetek között.

- A PALI névben 4 különböző betű van, ezeket 24-féleképpen rakhatjuk sorba.
- A PALI névnél az esetek felében a P megelőzi az L betűt, a másik felében az L betű előzi meg a P betűt. A LALI-nál a P helyett is L betű lett, így a korábbi P és L egyforma lett, a P és L sorrendje nem számít, ezért a LALI betűit feleannyi, azaz 12-féle sorrendben írhatjuk, mint a PALI betűit.
- Hasonlóan a LALI különböző sorrendjeinek felében az A megelőzi az I-t, a másik felében az I előzi meg az A-t. A LILI névben az A betű helyett is I betű van, egyformák lettek, az A és az I sorrendje nem számít, ezért a LILI betűit feleannyi, azaz 6-féle sorrendben írhatjuk, mint a LALI betűit.

Megjegyzés:

Hasonló feladatokat magyarórán is megoldhatunk szavak, betűk sorba rendezésére.

A „kerek asztal” típusú feladatok jellegzetessége, hogy a forgatással egymásba átvihető esetek nem különböznek.

3. példa

Hányféleképpen ülhet le egy kerek asztal köré

a) 3 gyerek: Kati, Jutka, Misi?

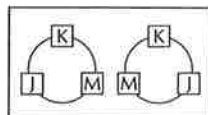
b) 4 gyerek: Kati, Jutka, Misi és Laci?

Két eset különböző, ha van olyan gyerek, akinek más a bal vagy a jobb oldali szomszédja.

Megoldás

a) Rajzoljuk le a különböző eseteket! (4.12.a ábra)

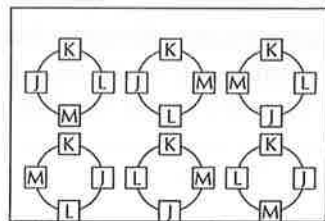
Három gyerek esetén 2 lehetőség van.



4.12.a ábra

b) Négy gyerek esetén 6 lehetőség van. (4.12.b ábra)

A példát először felfűzött betűs gyöngyökkel játsszuk el! Eközben felfedezhetik, hogy egy elem helyének rögzítése segít a megkülönböztetésben. 4 elem esetén rögzítsük egy elem helyét. A maradék 3 elemet 6-féle sorrendben rakhatjuk a körívre (az első elem rögzítésével „szétvágtuk a körvonalat” egyenes vonallá).



4.12.b ábra

Megjegyzés:

Ha színes gyöngyökből nyakláncot fűzünk és összekötjük a két végét, akkor ugyancsak „kerek asztal” típusú sorba rendezéshez jutunk. Ha mindegyik gyöngy különböző színű, akkor ismétlődés nélküli, ha nem, akkor ismétléses esetről van szó.

Kiválasztás sorrendben, ismétlés nélkül (ismétlés nélküli variáció)

4. példa

Az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számkártyákból hányféle kétjegyű számot lehet kirakni?

Megoldás

Rendezzük táblázatba a lehetőségeket!

A táblázat bal oldali oszlopa a tízes helyi értéken levő számkártyát, a felső sora az egyes helyi értéken levő számkártyát jelöli:

	1	2	3	4	5	6
1		12	13	14	15	16
2	21		23	24	25	26
3	31	32		34	35	36
4	41	42	43		45	46
5	51	52	53	54		56
6	61	62	63	64	65	

A táblázatról leolvasható a lehetőségek száma:
 $6 \cdot 6 - 6 = 30$.

5. példa

Hat gyerek között kisorsolunk két ajándékot, egy könyvet és egy társasjátékot. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak, ha egy gyerek legfeljebb egy ajándékot nyerhet?

Megoldás

Játsszuk el néhányszor a helyzetet! A sorsoláshoz a gyerekek nevét egy kalapba tesszük. Először a könyv nyertesének nevét húzzuk ki, ezt 6-féleképpen tehetjük meg. Az első nyertes nevét nem tesszük vissza a kalapba, így ott már csak 5 név marad, közülük húzzuk ki a társasjáték nyertesének nevét. Bárkit húztunk elsőre, másodikra 5-féle nevet húzhatunk, így a sorsolás eredménye $6 \cdot 5 = 30$ -féle lehet.

A lehetőségeket táblázatba rendezhetjük az előző példához hasonlóan, vagy gráffal is ábrázolhatjuk.

Kiválasztás sorrendben, ismétléssel (ismétléses variáció)

6. példa

Két dobókockával dobunk egy kétjegyű számot. A piros kockával dobott számjegy kerül a tízes, a zölddel dobott az egyes helyi értékre. Hányféle kétjegyű számot kaphatunk?

Megoldás

Rendezzük táblázatba a lehetőségeket!

A táblázat bal oldali oszlopa a tízes helyi értéken levő számkártyát, a felső sora az egyes helyi értéken levő számkártyát jelöli:

	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

A táblázatról leolvasható a lehetőségek száma: $6 \cdot 6 = 36$. Ezek között a kétjegyű számok között lehetnek tehát olyanok is, amelyeknek két számjegye azonos, azaz a számjegyek ismétlődhetnek.

7. példa

Hat gyerek között kisorsolunk két ajándékot, egy könyvet és egy társasjátékot. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak, ha egy gyerek több ajándékot is nyerhet?

Megoldás

Játsszuk el a helyzetet! A sorsoláshoz a gyerekek nevét egy kalapba tesszük. Először a könyv nyertesének nevét húzzuk ki, ezt 6-féleképpen tehetjük meg. Az első nyertes nevét visszatesszük a kalapba, így ott újra 6 név lesz, közülük húzzuk ki a társasjáték nyertesének nevét. Bárkit húztunk elsőre, másodikra 6-féle nevet húzhatunk, így a sorsolás eredménye $6 \cdot 6 = 36$ -féle lehet. A lehetőségeket táblázatba rendezhetjük az előző példához hasonlóan, vagy gráffal is ábrázolhatjuk.

Kiválasztások a sorrend figyelembevétele nélkül, ismétlés nélkül (ismétlés nélküli kombináció)

8. példa

- a) Öt gyerek között kisorsolunk két könyvutalványt, mindegyik 5000 forintos. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak, ha egy gyerek legfeljebb egy ajándékot nyerhet?
- b) Öt gyerek között kisorsolunk három könyvutalványt, mindegyik 5000 forintos. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak, ha egy gyerek legfeljebb egy ajándékot nyerhet?

Megoldás

A sorsolásokat az előbbiekhöz hasonlóan néhányszor eljátsszuk, a kihúzott neveket nem tesszük vissza, mert senki nem nyerhet egynél többet. Ezt követően rendszerbe foglalva felsoroljuk az összes lehetőséget. Ezek száma mindkét esetben 10.

Megjegyzés:

Számolás nélkül is megindokolhatjuk az egyenlőséget: amikor 2 gyereket kiválasztunk a könyvutalványokra, egyúttal a 3 ki nem választott gyereket is meghatározzuk. Ebből látszik, hogy mindegy, hogy a könyvutalványt kapó 2 gyereket vagy a könyvutalványt nem kapó 3 gyereket választjuk ki.

Kiválasztások a sorrend figyelembevétele nélkül, ismétléssel (ismétléses kombináció)

9. példa

Négy gyerek között kisorsolunk három könyvutalványt, mindegyik 5000 forintos. Hányféle eredménye lehet a sorsolásnak, ha egy gyerek több ajándékot is nyerhet?

Megoldás

Soroljuk fel az eseteket úgy, hogy a gyerekeknek neveket adunk (Kati, Jutka, Laci, Misi), és a kezdőbetűikkel jelöljük őket!

Válasszuk szét az eseteket!

Mindegyik könyvutalványt egy gyerek nyeri: KKK; JJJ; LLL; MMM.

Egy gyerek kettőt nyer: KKJ; KKL; KKM;

JJK; JKL; JJM;

LLK; LLJ; LLM;

MMK; MMJ; MML.

Mindent más gyerek nyeri:

KJL; KJM; KLM; JLM.

Így a lehetőségek száma:

20.

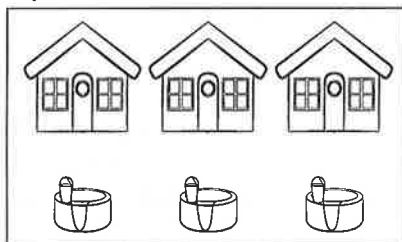
4.1.6. Gráfok

Az összeszámlálási feladatoknál eddig is gyakran alkalmaztuk a gráfokkal való ábrázolást. A gráfokkal kapcsolatban már az alsó tagozaton is sok érdekes problémával találkozhatunk.

A gráf pontokból (nevezhetjük csúcsoknak is) és élekből áll. A gráf élei lehetnek irányítottak, akkor irányított gráfról beszélünk.

A gráfok a pontok közötti kapcsolatokat jelentik (lásd 5.1.1. fejezet). Ezért az ábrázolásnál lényegtelen, hogy a pontokat összekötő vonalak egyenesek vagy görbék, melyik irányban haladnak, milyen hosszúak.

A vonalak helyzetét illetően azt vizsgálhatjuk, hogy a gráf lerajzolható-e a síkban úgy, hogy az élek ne metszék egymást. Egy nevezetes gráfelméleti probléma a három ház, három kút problémája, ahol az ábrán látható három ház mindegyikéből utat kell építeni mind-egyik kúthoz úgy, hogy ne legyen két út, amelyek metszik egymást. (4.13. ábra)



4.13. ábra

Belátható, hogy nem lehet a feltételeknek megfelelő utakat építeni.

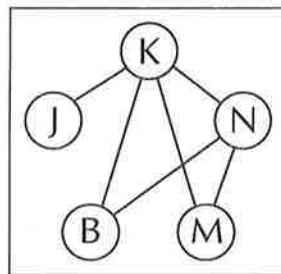
A gyerekek hasonló problémával találkoznak a csirkebél- (bolha-) játékban, amikor két játékos egymás utáni számokat köt össze felváltva a saját színésével úgy, hogy ne metssze a másik játékos vonalát. Ha kénytelen ezt tenni, akkor ott egy gombóc keletkezik, és az nyer, akinek kevesebb gombóca van.

Az irányított gráfok alkalmasak a relációk ábrázolására (lásd 5.1.2. fejezet).

A következő példában a gráf szimmetrikus relációt ábrázol, ekkor nincs szükség az élek irányítására.

1. példa

Péntek este öt barátnő közül többen beszéltek egymással telefonon (bármely két lány legfeljebb egyszer beszélt egymással). Másnap mindenki elmondta, hogy hány barátnőjével beszélt (ötük közül). Hány beszélgetés zajlott az öt lány között péntek este, ha egyszerre mindig ketten beszéltek egymással, és Kati 4, Jutka 1, Nóri 3, Marcsi és Bori 2-2 barátnőjével beszélt állítása szerint?



4.14. ábra

Megoldás (1)

Ábrázoljuk gráffal a beszélgetéseket, a pontok a lányokat jelentik, két pont össze van kötve éllel, ha a pontoknak megfelelő lányok beszéltek egymással telefonon. (4.14. ábra)

Kati mindenkiel beszélt, Jutka csak 1 lánnyal, aki biztos, hogy Kati. Nóri Katin kívül még 2 lánnyal beszélt, ezek csak Marcsi és Bori lehettek, mert Jutka nem beszélt velük. Ezzel Marcsinak és Borinak is megvan a 2-2 beszélgetése. Összesen 6 beszélgetést folytattak az ábra szerint.

Megoldás (2)

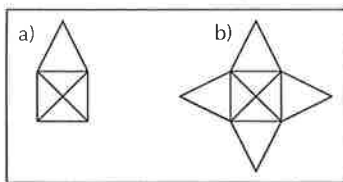
Ha összeadjuk az egy-egy lány által folytatott beszélgetések számát, akkor $4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 12$ -t kapunk. Ez épp a kétszerese a beszélgetések számának, mert minden beszélgetést mind a két résztvevőnél számoltuk. Tehát a beszélgetések száma: $12 / 2 = 6$.

Megjegyzés:

Ha összeadjuk a gráf egy-egy pontjából induló éleinek számát (a pontok fokszámát), akkor az élek számának kétszeresét, tehát páros számot kapunk.

2. példa

Rajzoljuk meg az ábrákat a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy minden vonalon pontosan egyszer haladunk át! (4.15. ábra) (A vonalak metszéspontján többször is átmehetünk.)



4.15. ábra

Némi próbálkozás után az *a)* ábrát meg tudják rajzolni a gyerekek, a *b)*-t azonban nem.

Az *a)* eset megoldásai közül minél többet mutassunk be, és vetessük észre, hogy mindegyik vonal két végpontja a házikó bal alsó és jobb alsó sarka.

Több hasonló ábra rajzolása után a tanulók felismerik, hogy amikor a felételnek megfelelő vonal áthalad egy ponton, akkor egy élen bemegy, egy élen kijön, azaz kettőt használ el a pontba futó élekből, ezért minden nem végponthoz páros számú élnak kell tartoznia. Ebből az is következik, hogy vagy egyetlen pont sincs az ábrán, amelyhez páratlan számú él tartozik, vagy pontosan két olyan pont van: egyik a kezdőpont, másik a végpont.

A *b)* ábrán a négyzet minden csúcsához 5 él tartozik, ezért nem rajzolható meg egyetlen vonallal a ceruza felemelése nélkül.

4.2. A statisztika tanítása

A statisztika és a valószínűség tanítása szorosan összefügg. Ezekben a témákban a kerettantervek egyike sem határoz meg magas követelményszintet. Az alsó tagozaton a statisztikai és valószínűségi tevékenységek legfőképp a tapasztalatszerzést szolgálják. Nagyon fontos szerepük van a természettudományos gondolkodás megalapozásában. A didaktikai módszerek közül a megfigyelés, beszélgetés, vita állnak középpontban. Munkaformának pedig sok esetben célszerű a csoportban történő tevékenységet választani, amely lehetőséget ad a kísérletek szervezésére és a megbeszélésre.

E témák jó lehetőséget biztosítanak a matematika egyéb területén a gyakorlásra. Ezt később a feladatoknál látni fogjuk.

Az első két évfolyamon a tantervi követelmények nagyon keveset írnak elő a statisztika témakörben, ezért a táblázatokon, diagramokon való tájékozódást a matematika egyéb területeinek fejlesztési feladataihoz kapcsolhatjuk.

A statisztika témakör bevezetése az alsó tagozaton több célt is szolgál:

- Az adatok gyűjtése, rendezése során fejlődik a gyerekek rendszerező képessége.

- A diagramok olvasása és készítése a függvényszerű gondolkodás szolgálatában áll.
- A gyűjtött vagy készen kapott adatokkal való becslések, számítások a számfogalom, a mérés és a számolás témakörét erősítik.
- A kísérletekkel kapott adatok megfigyelése, az események gyakoriságának megállapítása előkészíti a relatív gyakoriság értelmezését, ami egyúttal a valószínűség statisztikus fogalmának szemléletes alapozását is jelenti.
- A témakör a természettudományos gondolkodás fontos részét képezi.
- A téma természeténél fogva a matematika és a mindennapok közötti szoros kapcsolatot mutatja.

4.2.1. Adatok gyűjtése, rendezése. Diagramkészítés

A matematikaórán kétféle adatsokasággal dolgozunk: készen kapott adatokkal, illetve gyűjtött adatokkal. Adatokat gyűjthetünk mérés, megfigyelés, valószínűségi kísérlet során.

Adatokhoz hozzáférni manapság, az internet korszakában nem nehéz feladat. Mielőtt a gyerekek megtanulják saját adataikat feldolgozni, fontos, hogy mintát lássanak arra, milyen módszerek vannak az adatok feldolgozására. Például az adatok sorba rendezése, táblázat vagy diagram készítése az adatokat áttekinthetővé teszi. De még a készen kapott táblázatokban, diagramokban sem könnyű eligazodni, annak ellenére, hogy ez mindennapjaink szerves része.

Táblázatokkal kapcsolatos feladatok

- Táblázatból adatok leolvasása.
- Adatok táblázatba rendezése, táblázat készítése.
- Az adatok közötti összefüggések feltárása.

Az első két évfolyamon igen egyszerű táblázatok adatait dolgozzuk fel. A táblázatban való eligazodás, a sor és az oszlop fogalmainak megismerése a síkbeli tájékozódás témaköréhez kötődik (lásd 3.4.2. fejezet). A táblázatok eszközként használjuk továbbá a nyitott mondatok (lásd 2.2.3. fejezet), a kombinatorika (lásd 4.1.3. fejezet) és a relációk–függvények (lásd 5.1.2, 5.2.3. fejezetek) témakörökben.

A 3. évfolyamosoknak szánt következő feladatban kizárólagos cél a táblázatban való tájékozódás, a busz menetrendjének tanulmányozása. Miután a menetrendet alaposan tanulmányozták, megérthetik annak szerkezetét.

1. példa

1 Szeged Plaza – Anna-kút				
Indulási időpontok Szeged Plaza megállótól				
Óra	Tanítási munkanap	Szombat	Vasárnap	Iskolaszüneti munkanap
3				
4	07 27 47 57	07 27 47 57	07 27 47 57	07 27 47 57
5	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57
6	07 15 22 30 37 45 52	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	07 15 22 30 37 45 52
7	00 05 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
8	00 05 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55	07 15 22 30 37 45 52	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
9	00 05 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55	00 07 15 22 30 37 45 52	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
10	00 05 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55	00 07 15 22 30 37 45 52	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
11	00 05 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55	00 07 15 22 30 37 45 52	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
12	00 05 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55	00 07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
13	00 05 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
14	00 05 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
15	00 05 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
16	00 05 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
17	00 07 15 22 30 37 45 52	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
18	00 07 15 22 30 37 45 52	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	00 07 15 22 30 37 45 52
19	00 07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	00 07 17 27 37 47 57
20	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57
21	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57	07 17 27 37 47 57
22	07 27 47	07 27 47	07 27 47	07 27 47
23	07 27	07 27	07 27	07 27

4.16. ábra

- Hány buszt indítanak szombaton 2 és 3 óra között?
- Milyen napon van a legkevesebb járat?
- Miben különbözik a hétköznapi menetrend a hétvégitől?
- A nap mely szakaszában járnak gyakrabban a buszok hétköznap? Mit gondolsz, miért?
- A nap mely szakaszában járnak gyakrabban a buszok szombaton? Mit gondolsz, miért?
- Vasárnap délelőtt hány percenként jár a busz?

A táblázatban rejlő összefüggések feltárását, a táblázatkészítés tanítását segíti a következő példa.

2. példa

Az iskolai focibajnokság lezajlott. Ebben a táblázatban összesítették az eredményeket. A táblázat egy mezője a sornak és oszlopnak megfelelő csapatok

meccsének eredményét tartalmazza úgy, hogy elől a sornak, utána az oszlopnak megfelelő csapat góljait írtuk. (Például a 3. b – 3. d rangadót a 3. b osztály nyerte 3–2-re.)

A nyert meccsekért 2 pont, döntetlenért 1 pont járt.

	3. a	3. b	3. c	3. d
3. a		0–1	2–1	2–4
3. b	1–0		3–3	3–2
3. c	1–2	3–3		2–2
3. d	4–2	2–3	2–2	

- Ki nyerte a bajnokságot?
- Mi volt a 3. b – 3. c mérkőzésének eredménye?
- Melyik mérkőzésen volt a legtöbb gól? Hol volt a legkevesebb gól?
- Melyik csapat rúgta a legtöbb gólt?
- A táblázat alapján készítsünk egy másik táblázatot, amelyben osztályonként a bajnokságban rúgott gólok, a kapott gólok számát és a pontszámot tüntetjük fel!

A következő feladat a táblázaton való tájékozódás mellett a logikus gondolkodást is segíti.

3. példa

A negyedikesek bajnoksága is lezajlott, azonban a táblázatukat hiányosan töltötték ki. Egészítsd ki!

	4. a	4. b	4. c	4. d	rúgott gólok	kapott gólok	pontszám
4. a		1–2		0–1	3	7	
4. b			3–3				3
4. c							
4. d		5–3				4	5

Diagramokkal kapcsolatos feladatok

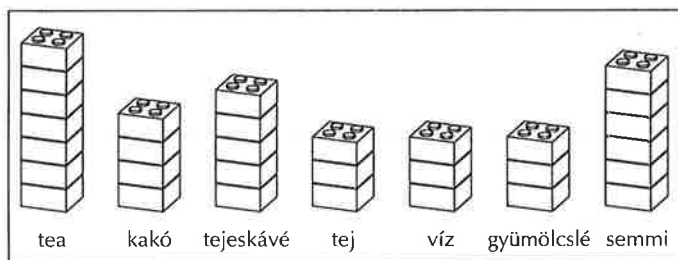
A diagramok értelmezése és készítése más jellegű feladatot ad tanítványainknak. Célszerű először gyűjtött adatokkal, tárgyi tevékenységgel dolgozni. Az osztályban végezhetnek megfigyeléseket a tanulók az őket érdeklő témákról. Célszerű megbeszélni, hogy mire kíváncsiak.

Oszlopdiagram készítése tárgyi tevékenységgel

4. példa

Adatokat gyűjtünk arról, hogy ki milyen folyadékot ivott reggelire. Mindenki kap egy legókockát, és a megfelelő oszlopba rakja. Az oszlopok magassága mutatja az egyes italokat fogyasztók számát. (4.17. ábra)

- Melyik italféleséget fogyasztották a legtöbben?
- Hányan nem ittak reggel semmit?
- Mennyi az osztálylétszám?



4.17. ábra

Megjegyzések:

- A fenti minta elemei nem számok, hanem szavak (tea, kakaó, tejeskávé, tej, víz, gyümölcslé, semmi). Az ilyen, nem számszerű adatokat a statisztikában kvalitatív adatoknak nevezik.
- Az a)–b) kérdések egy-egy elem gyakoriságára vonatkoznak, a c) kérdés pedig a minta elemszámára. A minta leggyakoribb elemét a statisztikában a minta móduszának nevezik.
- Már az 1. évfolyamon megpróbálkozhatunk három oszlop összehasonlításával. Az oszlopok számát fokozatosan növeljük az egyes évfolyamokon.

Természetesen szükség van arra is, hogy kvantitatív, azaz számszerű adatokat is feldolgozzanak a tanulók.

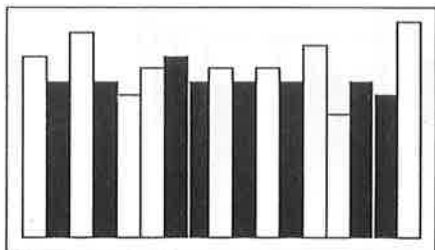
Magyarázó példa

Mesejátékhoz fejdísz készítünk, ehhez mindenkinek ki kell vágni egy papírcsíkot fejpantnak. Készítsünk diagramot a gyerekek fejkörfogatáról úgy, hogy egymás mellé rakjuk a papírcsíkokat. A lányok és fiúk színe különböző. (4.18. ábra)
(Vegyük észre a szoros kapcsolatot a mérés témakörével.)

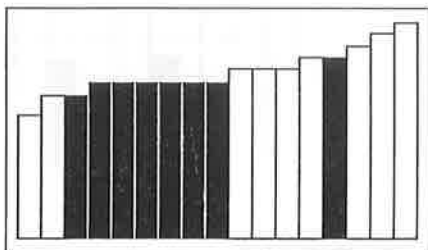
A gyerekek a csíkokra írják rá a nevüket és azt, hogy hány centimétert mértek! Ilyen módon egy-egy papírcsík minden információt tartalmaz.

Ezután a gyerekekkel közösen gondoljuk végig, hogy milyen módon jellemezhetjük az osztály tanulóinak fejkörfogatát.

Ehhez persze az adathalmaz esetében jogosan merül fel az igény, hogy állítsuk sorba hosszúság szerint a csíkokat. (4.19. ábra)



4.18. ábra



4.19. ábra

Az adatok jellemzése során felmerülhet, hogy a középső adattal adjuk meg az osztály tanulóira jellemző átlagos fejkörfogatot. Mivel most a minta 17 elemű, ez a 9. elemet jelenti.

A sorba rendezett adathalmaz lehetőséget nyújt arra is, hogy könnyen megállapítsuk a legnagyobb és a legkisebb elem közötti eltérést (terjedelem). Példánkban ez az érték az 1. és a 17. papírcsík hossza közötti különbség.

Megjegyzés:

A statisztikában az adatok mediánjának nevezzük páratlan számú adat esetén a sorba rendezett adatok közül a középsőt, páros számú adat esetén pedig a két középső átlagát (számtani közepét).

Oszlopdiaqram leolvasása

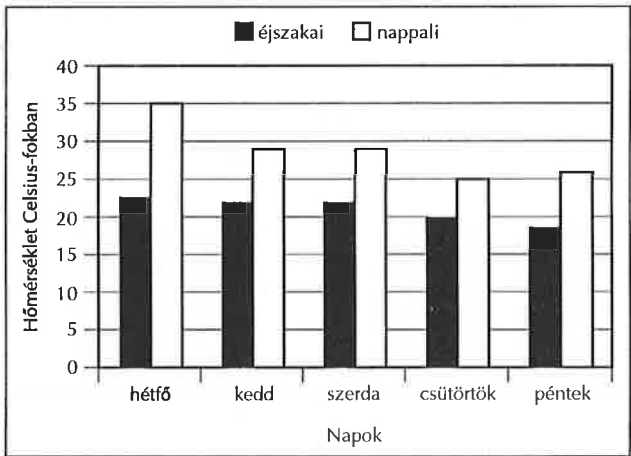
Az alábbi oszlopdiaqram leolvasása a 4. évfolyamon javasolt.

5. példa

A diagram öt nap éjszakai és nappali hőmérsékleti adatait ábrázolja (4.20. ábra):

- Készítsünk időjárás-jelentést a diagram alapján!
- Melyik napon volt a nappali hőmérséklet a legmagasabb?
- Melyik napon volt a legnagyobb a különbség a nappali és az éjszakai hőmérséklet között?
- Melyik napon nem volt 25 °C-nál melegebb?

e) Mennyi volt a legalacsonyabb és a legmagasabb nappali hőmérséklet között a különbség?



4.20. ábra

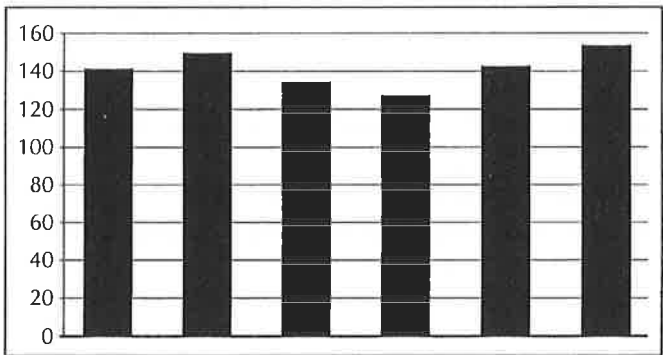
A statisztika és a logikai gondolkodás kapcsolatát mutatja a következő feladat. A 3–4. évfolyamon javasolt a diagramban rejlő összefüggés feltárása.

6. példa

A diagram hat 3. évfolyamos gyerek magasságát mutatja centiméterekben mérve. (4.21. ábra)

- Kati magassága 134 cm.
- Tamás magasabb, mint Béla.
- A 142 cm magas Judit csak 2 cm-rel alacsonyabb Pistinél.
- Zsuzsi 130 cm-nél alacsonyabb.

Írd a gyerekek nevét az oszlopok alá!



4.21. ábra

Oszlopdiaagram készítése, strigulázás, gyakoriság

Az 1. évfolyamtól kezdődő, tárgyi tevékenységekhez kötődő diagramkészítést később felváltják a papíron készülő diagramok. Ezeket bármely tantárgyhoz lehet kapcsolni. A következő példa a magyar irodalommal mutat szoros tantárgyi koncentrációt.

7. példa

Soroljuk fel, hogy a következő versszakban a szavak hány hangból állnak! (A dupla betű egy hangnak számít.)

Az egyes szavakat sorban olvasva a megfelelő szóhosszhoz húzzunk egy vonást (strigulát), majd a vonásokat számoljuk össze!

*Itt van az ősz, itt van újra,
S szép, mint mindig, énnekem,
Tudja isten, hogy mi okból
Szeretem? de szeretem.
(Petőfi Sándor: Itt van az ősz, itt van újra – részlet)*

a) Melyik a leggyakrabban előforduló szóhossz?

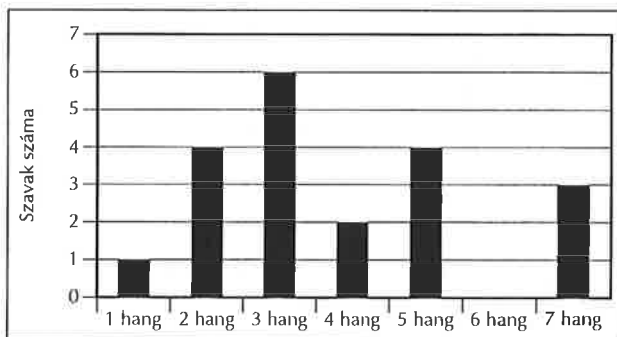
b) A szóhosszakhoz tartozó szavak számát ábrázoljuk oszlopdiaagramon!

Megoldás

Szóhossz	Strigulák	Szavak száma
1		1
2		4
3		6
4		2
5		4
6		0
7		3

a) A leggyakrabban előforduló szóhossz a 3, azaz a 3 hangból álló szavakból van a legtöbb a versben, összesen 6 db.

b) (4.22. ábra)



4.22. ábra

Megjegyzések:

- Az egyes szóhosszak előfordulásának száma a szóhosszak gyakorisága.
A diagram jól mutatja a leggyakoribb adatot, ez a szavak hosszának módusza, azaz 3 betűs szóból van a legtöbb.
- Alsó tagozaton az adatok relatív gyakoriságát, ami a gyakoriság és az adatok számának hányadosa, nem tanítjuk. Ennek megfelelően a kör- és a szalagdiagram sem tananyag.
- A versben az újra szót Petőfi rövid u-val írta. Ez alkalmat ad arra, hogy a helyesírás változásairól beszélgessünk. Amennyiben nem kívánunk ilyen szoros tantárgyi koncentrációt megvalósítani, választhatunk más versrészletet az elemzéshez.

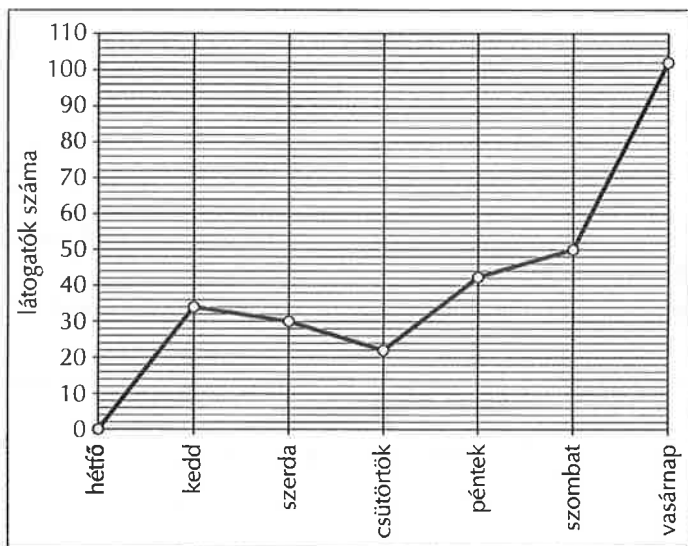
Vonaldiagram leolvasása

8. példa

A grafikon azt mutatja, hogy egy héten keresztül hány látogatója volt a múzeumnak. (4.23. ábra)

Olvasd le, hogy

- szerdán hányan nézték meg a kiállítást?
- melyik napon érkezett a legtöbb látogató?
- mikor volt zárva a múzeum?



4.23. ábra

Megjegyzések:

- A vonaldiagram (grafikon) készítésével és leolvasásával a relációk (függvénykapcsolatok) tanítása során is találkozunk (lásd 5.1.2. fejezet).
- A vonaldiagramokkal való ismerkedés előkészíti a koordináta-rendszerben való tájékozódást is.

4.2.2. Az átlag kiszámítása

A medián és a módusz tapasztalati előkészítését követően a számok számtani közepének kiszámítása következik. A tanterv a 3. évfolyamon 2 adat, a 4. évfolyamon „néhány” adat számtani közepét kéri. A statisztikai mutatók közül a számtani közép kiszámítása alapvető fontosságú.

Megjegyzés:

Többféle átlagérték-meghatározási mód is lehetséges, de a köznyelv „átlag”-on általában a számtani közepet érti. Például számolhatunk átlagot a fejkörfogatokból, a hőmérsékletekből, a szóhosszúságokból.

A számtani közép az adathalmaz nagyon fontos jellemzője, nevezetesen olyan mutató, melyet ha kicserélünk egy adathalmaz összes elemével, akkor az elemek összege változatlan marad. Célszerű ezen összefüggésből kiindulni és csak ezt követően megmutatni az átlag hagyományos kiszámítási módját.

Mivel a kiszámításhoz a számok összegét osztanunk kell az adathalmazban szereplő számok számával, alsó tagozaton figyelniünk kell arra, hogy az osztó egyjegyű szám legyen, továbbá hogy az osztás során ne keletkezzen maradék.

1. példa

Vegyenek ki a gyerekek a színesrúd-készletből egy-egy zöld, narancssárga, sötétkék, bordó, fekete, rózsaszín és fehér rudat!

Állítsuk sorrendbe a rudakat hosszúságuk szerint! (4.24.a ábra)

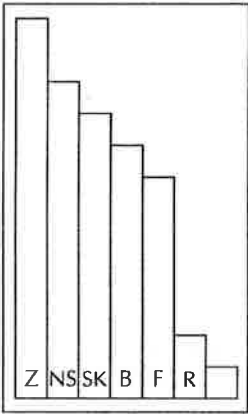
Válasszuk ki közülük a leghosszabbat és a legrövidebbet!

A hosszabbat cseréljük ki valamennyivel rövidebbre, a rövidebbet pedig ugyanannyival hosszabbra!

Ismételjük ezt az eljárást addig, míg csupa egyforma színű rudat nem kapunk!

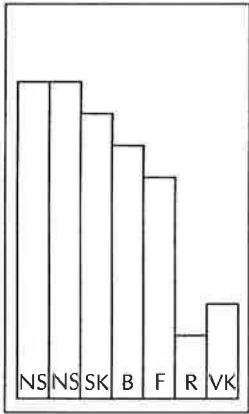
Megoldás

- Változtassuk először a fehér rudat két egységgel nagyobbra, míg a zöldet kettővel kisebbre. (4.24.b ábra)
 - Csökkentsük az egyik narancssárga rudat két egységgel, míg a rózsaszínt növeljük ugyanannyival. (4.24.c ábra)
- (Az eljárás befejezését az olvasóra bizzuk.)



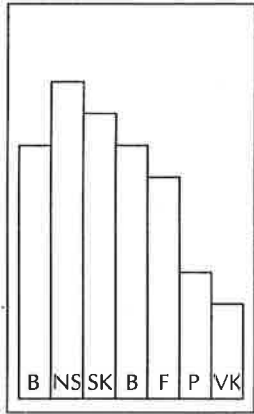
4.24.a ábra

1. →



4.24.b ábra

2. →



4.24.c ábra

2. példa

Adottak a következő számok: 12, 23, 44, 73, 88.

- a) Sorozatos cserékkel helyettesítsük az öt számot öt egyformával, melyek összege ugyanannyi, mint az eredeti számok összege!
- b) Számítsuk ki az öt szám átlagát!

Megoldás

- a) $\underline{12}$, 23, 44, 73, $\underline{88} \rightarrow 42, \underline{23}, 44, \underline{73}, 58 \rightarrow \underline{42}, 43, 44, 53, \underline{58} \rightarrow 48, \underline{43}, 44, \underline{53}, 52 \rightarrow 48, 48, \underline{44}, 48, \underline{52} \rightarrow 48, 48, 48, 48, 48$
- b) $(12 + 23 + 44 + 73 + 88) : 5 = 240 : 5 = 48$

Megjegyzések:

- Az 1–2. példákban az egyes lépésekben végrehajtott cserék azon alapulnak, hogy az összeg változatlan marad, ha egyik tagját növeljük valamennyivel egy másik tagját pedig ugyanannyival csökkentjük.
- Miután az a) feladatban bemutatott eljárás eredményeként öt azonos számot kaptunk, rátérhetünk a b) feladatban a kiszámítási mód magyarázatára: az öt szám összege nem változott, az 5-tel való osztás pedig most 5 egyenlő részre osztást jelent.
- A gyerekeknek feladott átlagszámítási feladatoknál vigyázzunk az adatokkal, mert az osztás eredményeként ritkán kapunk egész számot.

4.3. A valószínűségi szemlélet alapozása

A valószínűségi szemlélet fejlesztése során olyan tevékenységeket végzünk, melyek a valószínűség fogalmának szemléletes alapozását adják. Az alsó tagozaton a valószínűség fogalmának előkészítése gyakorlati mérésekhez, kísérletekhez kapcsolódva, hosszú érlelési idő alatt formálódik. Ebben a témában a következtetések levonását nem célszerű sürgetni, a tennivalók leginkább a tapasztalatszerzést célozzák. A valószínűségi szemlélet alakítása során rengeteg kísérletet, vagyis a relatív gyakoriságok mérését végezzük anélkül, hogy ezt meg is neveznénk. Ennek tükrében alsóbb évfolyamokon a köznyelvben használt esély, valószínűség szavakhoz egy nem pontosan definiált jelentés társul. A tantervi fejlesztési célok között kiemelt jelentőséget kap az adatok lejegyzésének, megfigyelésének, illetve feldolgozásának egyre tudatosabb volta. Ez lehetővé teszi a gyakoriságok megfigyelését. Egy kicsivel határozottabb cél, hogy a gyerekek jól el tudják különíteni a determi-

nisztikus eseményeket a véletlen eseményektől. Vagyis a *biztos*, a *lehetetlen*, illetve a *lehetséges*, de nem *biztos* fogalmával tisztában legyenek.

Fontos a helyes szóhasználat. A biztos, lehetetlen vagy lehetséges, de nem biztos kifejezéseket csak eseményekre használjuk, állításokra ne! Egy állítás vagy *igaz*, vagy *hamis*, nincs olyan, hogy *lehetséges*, *hogy igaz*.

Jóval később következik az a fokozat, amikor a valószínűséghez egy számot rendelünk, a vizsgált jelenséghez pedig egy azt leírni tudó modellt. Ez lehet a kiindulópontja a valószínűség számításának, ami megállapodások, sokrétű tevékenység és gondolkodási művelet eredménye.

A téma feldolgozása során kísérleteket végzünk, amelyek kimenetele véletlenszerű, és sok játékot játszunk. Fontos azonban tudnunk, hogy a kísérletek és játékok kimenetelét számos tényező befolyásolja. Az adott szituációban egyáltalán nincs arra garancia, hogy a valószínűbb esemény relatív gyakorisága nagyobb lesz a kevésbé valószínű esemény relatív gyakoriságánál. Különösen akkor nem, ha kevés számú kísérletet végzünk. Csak annyit mondhatunk, hogy minél több kísérletet végzünk, annál valószínűbb, hogy a legvalószínűbb esemény relatív gyakorisága lesz a legnagyobb. Ez a bizonytalanság a valószínűségszámítás sajátos tulajdonsága.

Az eszközök alapvetően kétféleképpen lehetnek:

- Olyanok, melyek biztosítják, hogy az elemi események egyenlő valószínűséggel fordulnak elő. Például dobókockák, más szabályos dobótestek, korongok, pénzérmék, számkártyák, pörgettyűk, színes golyók.
- Olyan eszközök, melyeknél az elemi események valószínűsége nem egyenlő. Például szabálytalan dobótestek és pörgettyűk, céltáblák és más hétköznapi eszközök.

Alsóbb évfolyamokon a valószínűségi szemlélet alakítása során egy sor olyan problémát vethetünk fel, amely nem kizárólagosan e témakörbe tartozik. Tévedés azt gondolni, hogy amennyiben a tanóra kiemelt célja a valószínűségi szemlélet fejlesztése, akkor egész órán kizárólag dobókockákat dobálunk, pénzérméket csörgetünk vagy egy zsákból színes golyókat húzunk. A tanórákon megvalósulhat a valószínűségi szemlélet fejlesztése úgy is, hogy olyan problémákat vetünk fel, amelyek a matematika más területeit is érintik, vagy éppen azok a hangsúlyosak.

A valószínűségfogalom alakulásának lépései

- Biztos, lehetetlen és lehetséges, de nem biztos események felismerése.
- Esélyek összehasonlítása: Melyik a valószínűbb?

Szubjektív: tippelés

Objektív: kísérlet

Elméleti megfontolások

4.3.1. Biztos és lehetetlen

Céljaink között kiemelt jelentősége van a *biztos*, a *lehetetlen* és a *lehetséges*, *de nem biztos* események megkülönböztetésének. Legszerencsésebb, ha a gyerekek ezeket is játéksituációkban élik meg. A következő, 3. évfolyamos tevékenységek során a piros-kék korongokat használjuk.

1. példa

Három korongot feldobunk egymás után 10-szer.

a) Minden dobás előtt tippelj! Lesz legalább két piros?

Tipp										
Dobás										

b) Minden dobás előtt tippelj! Lesz legalább két kék?

Tipp										
Dobás										

c) Minden dobás előtt tippelj! Lesz legalább két egyforma színű?

Tipp										
Dobás										

d) Minden dobás előtt tippelj! Lesz mindkét szín?

Tipp										
Dobás										

e) Minden dobás előtt tippelj! Egyik színből sem lesz legalább kettő?

Tipp										
Dobás										

A kísérletet 5 fős csoportban játszhatjuk úgy is, hogy a tanulók kapnak egy-egy kártyát az események leírásával. Minden dobás után kap egy pontot az a játékos, akinek a kártyájára írt esemény bekövetkezett. Így a gyerekek megkapják az események gyakoriságát, és a játék során maguk jönnek rá hogy az *e)* esemény lehetetlen, a *c)* esemény biztos és az *a), b), d)* lehetséges, de nem biztos események.

Megjegyzés:

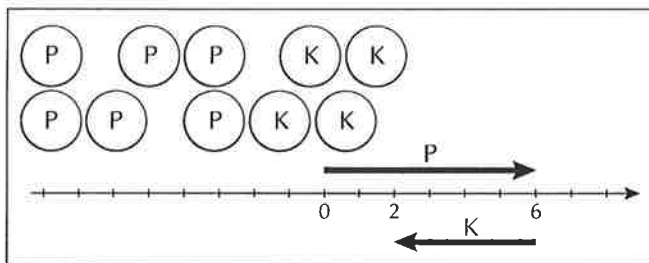
A biztos és lehetetlen események megtalálását a skatulyaelv segíti: kétféle szín van, 3 korong, így kell, hogy legyen legalább két olyan korong, amelyeken azonos szín van.

A hasonló feladatok játékosan segítik a matematikai szaknyelv elsajátítását: azaz a *legalább, nincs, van olyan, minden* stb. szavak értelmezését.

2. példa

10 koronggal játszunk. Számegyenest rajzolunk egy lapra, és bábuval (babszem, gomb, radír stb.) lépkedünk. A korongok feldobása után annyit lépünk jobbra, amennyi piros korong esett az asztalra, és annyit balra, amennyi kék.

Például ha 6 pirosat és 4 kéket dobuk, a 0-ról indulva jobbra lépünk 6-ot, balra 4-et (4.25. ábra)



4.25. ábra

10 dobás után tippeljük meg, hová érkezik a bábu legtöbbször a következők közül!

-4	-3	10	1	-16
----	----	----	---	-----

Az első dobás a 0-ról indul, a második onnan, ahova az első jutott.

Mielőtt elkezdődik a játék, a tanulók választanak a számkártyák közül. Ha lejátszottak egy játékot, a tanító feljegyzi a táblára, hogy ki hova jutott. Például: $-2, 2, 2, 4, 6, \dots, 12$.

Ha nem figyelnek fel a számok párosságára, újabb kört játszanak. Az újabb kör előtt újra választhatnak kártyát. Most már erősödhet a sejtés, hogy minden esetben páros számra érkezünk, sőt minden közbülső lépés is páros számra jut.

Ezután kezdődhet a magyarázatok keresése. A dobások során biztos, hogy mindig párosokat lépünk, mert a 10-et egy dobással vagy két páros, vagy két páratlan szám összegére tudjuk bontani. Ha egy számhoz páros/páratlan számot adunk (jobbra lépés), majd páros/páratlan számot veszünk el (balra lépés), az eredmény páros szám lesz. Másképp: Ha egyetlen korong színét változtatjuk egy adott dobást követően, akkor kettővel változik a lépésszám.

Ha tehát páros számról indulunk, akkor lehetetlen páratlan helyre érkezni.

Megjegyzés:

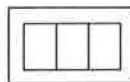
A játék a negatív szám fogalmának alakulását is segíti, hiszen a játék során átléphetjük a nullát, akár a pozitív, akár a negatív irányba.

4.3.2. Esélyek összehasonlítása: Melyik a valószínűbb?

Esélylatolgatás: „Érzésre” végezzük az esélylatolgatást a következő példában.

1. példa

a) A tanulók a füzetükbe lerajzolják egy háromjegyű szám számjegyeinek helyét (4.26. ábra):



Játékszabály: A játékvezető egy számot húz az 1, 2, ..., 9 számkártyák közül, a játékosok a kapott számot beírják valamelyik helyre (utána változtatni nem szabad), ezután újra húz visszatevéssel egyet, és a második számot is beírják, majd ugyanígy a harmadikat. Az nyer, aki a legnagyobb számot tudja előállítani.

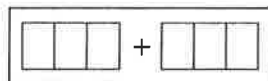
4.26. ábra

A játékban a valószínűségi szemlélet fejlesztése úgy valósul meg, hogy a tanulók megtapasztalják, nem az ő akaratukon, hanem a véletlennek múlik, hogy mekkora lesz egy-egy húzott számjegy. Megfigyelhetik, hogy az előzmények nem befolyásolják az újabb húzás eredményét. Néhány játék után azonban fontos tapasztalatokra tesznek szert:

Ha először az 1, 2, 3 számok valamelyikét húzzuk, akkor azt az egyesek helyére érdemes írni. A 7, 8, 9 viszont elég nagy számok ahhoz, hogy a százask helyére írjuk. Sőt, ha 9-et húztunk, akkor biztos, hogy nem húzunk később nagyobb stb.

Ennek a játéknak a hozadéka nem csak a valószínűségi fejlesztés. Megtapasztalhatják a tanulók azt is, hogy egy háromjegyű szám nagysága az egyes helyi értékeken lévő számjegyek nagyságától függ.

b) Most a következő ábrát kell lerajzolni (4.27. ábra):



4.27. ábra

A játékszabály ugyanaz, mint az előzőben, csak most hat számot húzunk. Az nyer, aki a legnagyobb összeget tudja előállítani.

Itt az előzőek mellett tapasztalatot szerezhetnek a tanulók például arról is, hogy ha két összeadás csak abban tér el, hogy az egyik tag nagyobb, akkor az összeg is nagyobb lesz. Tegyük fel például, hogy az egyik gyermek a húzások után a $342 + 721$ összeget állította elő, a másik pedig a $432 + 721$ -et. Ekkor a számítás elvégzése nélkül el tudják dönteni, hogy melyikük nyert. Itt ez a tapasztalat természetes módon adódik.

Ez a játék alkalmas arra is, hogy a kombinatorikus gondolkodást fejlessze, ha a szabályt úgy módosítjuk, hogy először kihúzzák mind a hat számot, és utána kell beírni az összegeket. Ebben az esetben az a gyerek nyer, aki adott idő alatt a legtöbbféle összeget tudja előállítani. Miközben a gyerekek – a kihúzott számjegyek ismétlődésétől függően – a különböző összegek előállításán fáradoznak (közben gyakorolják a műveletek végzését), az összeadás kommutativitásáról szerzett ismereteiket is megerősíthetik, valamint összefüggéseket fedezhetnek föl az egyes helyi értékeken álló számok között. A nagyon jól gondolkodó gyerekek a $732 + 546$ összeadás elvégzése után nem rabolja az idejét azzal, hogy az $532 + 746$, $742 + 536$ vagy a $736 + 542$ összeadásokat is elvégezze.

2. példa

Dobjuk fel sokszor a színesrúd-készlet rózsaszín rúdját, és figyeljük meg, hányszor esik a kisebb és hányszor a nagyobb lapjára, azaz hányszor esik

így: , és hányszor így: !

4.28.a. ábra

4.28.b. ábra

(Dobjunk fél dióhéjjal vagy más eszközökkel is!)

Tippelés: Először tippeljük meg, hogy a két különböző méretű lap közül melyikre fog esni többször a rózsaszín rúd!

Kísérlet: Végezzünk el 10 dobást, és számoljuk össze, ezek között melyik esetből van több!

Összegezzük a tanulók kísérleteinek eredményeit. Így az osztálylétszámtól függően 200-300 dobás eredményét vizsgálhatjuk meg. Ekkor már jó esélyünk van arra, hogy a két különböző kimenet gyakoriságában eltérést lássunk, s tapasztaljuk, hogy kevésbé valószínű az a kimenet, amikor a rúd a négyzet alakú lapjára esik.

Megjegyzés:

A fenti példában a különböző méretű lapokra esés valószínűségét a későbbiek során is csak relatív gyakorisággal közelítjük, a pontos értéket nem tudjuk számolni a klasszikus képlet alapján. Nagyon fontos a későbbi tanulás szempontjából, hogy a tanulók találkozzanak ilyen eseményekkel is, melyek valószínűségének meghatározására a klasszikus modell nem alkalmas.

Egy esemény *relatív gyakorisága* a gyakoriság és a kísérletek számának hányadosa. Ez nem alsó tagozatos tudnivaló, de a tanítónak háttértudásként elengedhetetlen.

Ha a kísérlet véges sok lehetséges kimenetele egyformán valószínű, akkor *klasszikus valószínűségi modellről* beszélünk, és az események valószínűségét kiszámolhatjuk a $\frac{\text{kedvező lehetőségek száma}}{\text{összes lehetőség száma}}$ képlet alapján. A fenti

példában a kísérletnek 6 lehetséges kimenetele van aszerint, hogy a téglatest melyik lapjára esik, ám ezek (ellentétben a kockadobással) nem egyformán valószínűek.

Amikor két esemény valószínűségét szeretnénk összehasonlítani, első benyomásunk alapján gyakran rosszul ítélünk. A kísérletek során szerzett tapasztalatok megérlelhetnek bennünk egy sejtést, melynek a későbbiekben elméleti úton is utánajárhatunk.

Magyarázó példa

a) Három piros-kék koronggal fogunk dobni. Nézzük meg, milyen események következhetnek be a három korong feldobása esetén!

- 3 piros
- 1 piros, 2 kék
- 2 piros, 1 kék
- 3 kék

Az első benyomásunk gyakran az, hogy ez a négyféle esemény egyenlő valószínűséggel fordulhat elő.

b) Végezzünk el egy 100 dobásból álló kísérletsorozatot erre vonatkozólag!
(Célszerű csoportokban dolgozni, csoportonként 10-20 dobást végezni, majd az eredményeket összesíteni.)

Először tippeljük meg, hogy az egyes események 100-ból hányszor fordulnak elő, majd a kísérlet során strigulázással jegyezzük táblázatba az adatokat!

Lehetőségek	3 piros (PPP)	2 piros, 1 kék (PPK)	1 piros, 2 kék (PKK)	3 kék (KKK)
Tipp				
Ennyiszor fordult elő				

c) Készítsünk oszlopdiagramot a kísérlet eredményéről!

38				
36				
34				
32				
30				
28				
26				
24				
22				
20				
18				
16				
14				
12				
10				
8				
6				
4				
2				
	PPP	PPK	PPK	KKK

Az oszlopdiagram elkészítése (itt a gyűjtött adatok ábrázolása is előkerül, azaz statisztikát is tanítunk) után látható, hogy jóval többször fordul elő az, hogy PKK vagy PPK oldalra estek a korongok, mint az, hogy PPP vagy KKK oldalra.

Ezek után következhet az okok feltárása, ami már elméleti, azaz kombinatorikai megfontolásokat igényel. Ehhez célszerű megszámozni a korongokat. Az összes eset rendszeres felírása táblázattal (lásd 4.1.3. fejezet):

1. korong	P	P	P	P	K	K	K	K
2. korong	P	P	K	K	P	P	K	K
3. korong	P	K	P	K	P	K	P	K

A lehetőségek felsorolásakor látható, hogy például a PPK, a PKP és a KPP esetek csak a betűk sorrendjében térnek el, vagyis abban, hogy melyik koronggal dobunk kéket. Innen látható, hogy a 2 piros, 1 kék és az 1 piros, 2 kék kimenetek háromféleképpen is megvalósíthatók, míg a 3 piros és a 3 kék kimenetek csak egyféleképpen. Ez magyarázza a feni kísérleti tapasztalatot.

Megjegyzés:

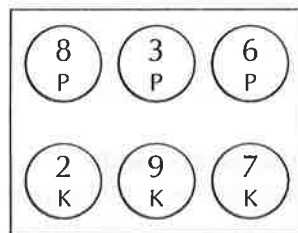
Természetesen előfordulhat, hozzátartozik a véletlenszerűséghez, hogy a kísérlettel nem tudjuk alátámasztani, amit szeretnénk. A tanító az ilyen helyzetben nem lepődhet meg, készüljön rá!

3. példa

Számozzuk meg a három korong két oldalát az ábrán látható módon, majd dobjuk fel a korongokat egyszerre. (4.29. ábra) Vizsgáljuk meg az alábbi eseményeket! Van-e biztos, lehetetlen közöttük?

Van a dobott korongok között piros.

- A számok szorzata osztható 3-mal.
- A számok szorzata páratlan.
- A dobott számok között nincs a 2.
- A dobott számok szorzata 100-nál kisebb.
- A dobott számok összege 17.
- A dobott számok szorzata osztható 4-gyel.
- A dobott korongok közül legalább kettő kék.



4.29. ábra

A vizsgálatokat végezzük előbb tippeléssel, majd kísérletekkel (legalább 10 dobást végezzünk mindegyik esemény vizsgálatához). Ezek után beszél-

gessünk arról, hogy van-e olyan lehetőség, amely a kísérlet során ugyan nem valósult meg, de akár be is következhetett volna.

A kérdések elméleti (kombinatorikai) megfontolások segítségével is megválaszolhatók. Ehhez abból kell kiindulni, hogy egy dobásnak összesen 8-féle eredménye lehet:

1. korong	2. korong	3. korong
8	3	6
8	3	7
8	9	6
8	9	7
2	3	6
2	3	7
2	9	6
2	9	7

Gyakran előfordul, hogy két esemény bekövetkezési esélyének szubjektív összehasonlítása, azaz a tippelés olyan eredményre vezet, amelyet (nagy valószínűséggel) sem a kísérlet, sem az elméleti megfontolás nem fog alátámasztani.

A tevékenység végzése közben a gyerekek tapasztalatot szerezhhetnek arról, hogy van olyan esemény, ami gyakrabban előfordul, és van, ami nem. Az elemi események összegyűjtése kombinatorikus meggondolást kíván. Ezután azt is megfigyelhetik, hogy van olyan esemény, ami többféleképpen előfordulhat. Klasszikus valószínűségi mezőben felvetett problémák esetén általában igaz, hogy ami többféleképpen előfordulhat, az gyakrabban elő is fordul, de a tényleges kísérlet ezt nem feltétlenül támasztja alá. Alsó tagozaton még nem jutunk el addig, hogy kimondjuk: ami többféleképpen előfordulhat, az valószínűbb.

Magyarázó példa

Bökjünk az 1–100 számtáblázatra bekötött szemmel! A bökés előtt tippeljük meg, hogy a szám felírható lesz-e két 10-nél nem nagyobb, 1-től különböző szám szorzataként!

A gyerekek könnyebben tudnak játszani, ha kéknek nevezzük azokat a számokat, amelyek felírhatók, és pirosnak azokat, amelyek nem írhatók fel a kívánt módon. Így a tippelést korongokkal is végezhetik.

Ez a játék például a szorzótáblák gyakorlásakor kerülhet elő. Mivel ezt megelőzően hosszú ideig tanulták a szorzótáblákat – 100 esetet külön-külön –, igen nagy eséllyel gondolhatják, hogy több olyan szám van a táblázatban, ami szerepel a kisegyszeregyben, mint ami nem.

Tippelés és (legalább 10) kísérlet után nézzük meg, melyik fajta szám fordul elő többször.

Elméleti megfontolások:

Hogy számba tudjuk venni, melyek azok a számok, amelyek felírhatók két 10-nél nem nagyobb, 1-től különböző szám szorzataként, leragasztjuk a kékkel jelölt mezőket (a táblázatban egy-egy lehetséges szorzatot tüntettünk fel):

1	2	3	2 · 2	5	2 · 3	7	2 · 4	3 · 3	2 · 5
11	6 · 2	13	7 · 2	3 · 5	4 · 4	17	3 · 6	19	10 · 2
3 · 7	22	23	3 · 8	5 · 5	26	3 · 9	4 · 7	29	5 · 6
31	4 · 8	33	34	7 · 5	6 · 6	37	38	39	4 · 10
41	6 · 7	43	44	9 · 5	46	47	6 · 8	7 · 7	5 · 10
51	52	53	9 · 6	55	7 · 8	57	58	59	6 · 10
61	62	9 · 7	8 · 8	65	66	67	68	69	7 · 10
71	9 · 8	73	74	75	76	77	78	79	8 · 10
9 · 9	82	83	84	85	86	87	88	89	9 · 10
91	92	93	94	95	96	97	98	99	10 · 10

Meglepő lehet, hogy milyen kevés eset szerepel a kisegyszeregyben, tehát nem túl nagy az esélye, hogy a kívánt számra bökünk. Pontosabban: 100-ból csak 37 ilyen szám van, ezért kisebb a valószínűsége, hogy ilyenre bökünk, mint hogy nem.

A játék folytatható úgy, hogy a kék számok most azok legyenek, amelyek felírhatók két 1-től különböző (akár 10-nél nagyobb) szám szorzataként, és a pirosak azok, amelyek nem. Most már a kék számok bökésének esélye lesz nagyobb. Pontosabban: a 100 db szám között 74 db kék és 26 db piros van.

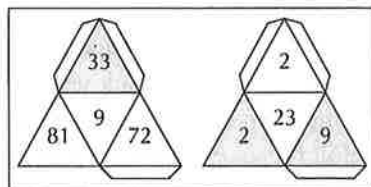
Alsó tagozaton az események valószínűségéhez konkrét számot még nem tudunk hozzárendelni, de arra lehetőségünk van, hogy a valószínűségek közötti nagyságviszonyokat egy olyan skálán ábrázoljuk, melynek kezdeti értéke a lehetetlen, végső értéke pedig a biztos eseményhez tartozik.

Egy-egy esemény valószínűségének vizsgálata három szinten történhet. Először szubjektív esélylatolgatást, azaz tippelést végzünk. Ezt követi a kísérlet, amelynek során azt figyeljük, hogy a kérdéses esemény hányszor kö-

vetkezik be. Végül – egyszerű kombinatorikai problémák esetében – elméleti megfontolásokkal támasztjuk alá (vagy cáfoljuk meg) a tippelés és a kísérlet eredményét. A fenti skála arra is alkalmas tehát, hogy a tippelés, a kísérlet és a számítás eredményét egymáshoz viszonyítsuk.

Magyarázó példa

Az ábrán látható háló alapján elkészített két tetraéderrel dobunk egyszerre, és arra kell tippelni, hogy a tetraéderek alján található számok szorzata páros lesz vagy páratlan. Vagyis a páros szorzat dobásának esélye a kérdés. (4.30. ábra)



4.30. ábra

Tippelés:

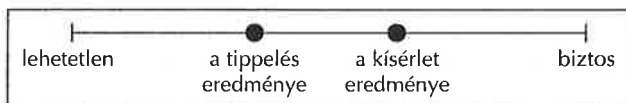
Az első benyomások alapján, mivel az egyik tetraéderen két páros és két páratlan szám áll, a másikon pedig 3 páratlan egy páros ellenében, úgy érezzük, a szorzat is talán inkább lehet páratlan, mint páros. A páros dobás esélyét a legtöbbször kevesebbre tippelik, mint a páratlan dobását, és elhelyezik az alábbi skálán (4.31. ábra):



4.31. ábra

Kísérlet:

Ezután húsz kísérletet végzünk, aminek tapasztalatai remélhetőleg mutatják, hogy többször lesz páros a szorzat, mint páratlan. A kísérlet eredményét szintén elhelyezzük a skálán. (4.32. ábra)



4.32. ábra

Felvetődik bennünk az igény a „mérés” finomítására, ami a kísérletek számának növelésével érhető el. 100 dobás után úgy érezhető, már kevésbé lehet véletlen, hogy sokkal több lett a páros szorzat, mint a páratlan. Ha szükségesnek látjuk, változtatunk a kísérlet eredményének helyén a skálán.

Megjegyzés:

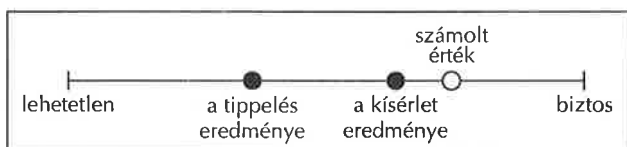
A kísérlet eredménye a páros szorzat relatív gyakorisága.

Mivel a tippelt érték és a kísérleti eredmények között feltehetően sok esetben eltérés mutatkozik, felmerülhet az igény az okok felderítésére.

A két tetraéderrel dobható számokat az alábbi táblázatba rendezhetjük. X-et írtunk abba a mezőbe, amelynek megfelelő dobások szorzata páros.

·	23	2	2	9
33		X	X	
9		X	X	
81		X	X	
72	X	X	X	X

Az esetek összeszámlálása után látható, hogy 16-féle egyformán valószínű dobás lehetséges. Ezek közül 10-féleképpen fordulhat elő, hogy a számok szorzata páros. A számolt értéket is elhelyezzük a skálán, összehasonlítva a tippelés és a kísérlet eredményével. (4.33. ábra)



4.33. ábra

Fontos megjegyezni, hogy alsó tagozaton nincs, nem is lehet szó arról, hogy egy esemény valószínűségét számmal jellemezzük. Ezért a fenti példában sem az a feladat, hogy az egységnyi hosszúságú szakaszon pontosan megkeressük a relatív gyakoriságot jellemző tört és a $10/16$ tört helyét, hanem csupán az, hogy a vizsgált eseményt a lehetetlen és a biztos eseményekhez viszonyítsuk. A tippelés, a kísérlet és a számolás eredményének összehasonlítása a valószínűségi szemlélet fejlesztését szolgálja.

Vigyáznunk kell arra is, hogy mindig tudatában legyünk annak, mikor dolgozunk a relatív gyakorisággal, és mikor számolunk elméleti értéket kombinatorikai megfontolások alapján.

5. RELÁCIÓK, FÜGGVÉNYEK, SOROZATOK

A relációk, függvények, sorozatok témakör kapcsán olyan – tapasztalatokra épített – ismereteket tanítunk, amelyek a tanulók gondolkodásának fejlesztéséhez feltétlenül szükségesek. Ezek az ismeretek azért is fontosak, mert megkönnyítik más matematikai fogalmak és nem matematikai fogalmak közötti kapcsolatok megértését, illetve kialakítását.

Természetesen nem kell a gyerekeknek tudniuk a reláció fogalmának matematikai meghatározását, tudniuk kell azonban eligazodni adott, konkrét összefüggések között, mindezzel segítjük a gondolkodási formák alakulását, a kapcsolatok áttekintésének képességét.

Más anyagrészekhez kapcsolódva is előfordul ez a témakör, de mint önálló témakörrel kapcsolatos munka három részre tagolható:

1. modellszerep (reláció, függvény, sorozat mint valódi probléma modellje),
2. összefüggés-felismerő képesség,
3. egyszerű, elemi ismeretek feltárása.

Erre a három pontra a későbbi tárgyalás során részletesen mutatunk példákat.

Más témakör tanítása, bevezetése, elmélyítése során (számfogalom fejlesztése, számolási készség fejlesztése, geometriai, kombinatorikai megfigyelések gyűjtése, mérési tapasztalatok) felhasználjuk a relációknál, függvényeknél tanultakat.

Olyan matematikai fogalmakkal van dolgunk, amelyek nemcsak a matematika más területeit, hanem a mindennapi életet is átszövik. Ezért a témakör tanítása a mindennapokkal való szoros kapcsolatának köszönhetően színesebbé tehető példák, tevékenységek segítségével. Olyan eszközt jelent, amely segít a kapcsolatok feltárásában és a fogalmi rendszerek kialakításában. Így a megismerés útja nem lehet deduktív. Olyan helyzeteket kell teremteni, hogy a gyerekek megértsék, átlássák az életben előforduló bonyolult kapcsolatokat. Az eljárás, ábrázolás segít mindezekben.

A NAT-ban és a kerettantervekben a fejlesztési célok között szerepel:

- Egyszerű, konkrét – tárgyak, személyek, halmazok, matematikai és nem matematikai fogalmak közötti – kapcsolatok megismerése, kifejezése tevékenységgel, rajzzal, szóban, összetartozó párok (hármások) képzése, felsorolása.
- Néhány sorozatra jellemző tulajdonság megismerése. Megfigyelések, elemi ismeretek gyűjtése sorozatokról, függvényekről. Például a soro-

zat növekedése, csökkenése, a változás sebessége; összefüggés leírása nyitott mondattal, nyíljelöléssel (a „kijövő érték” változása a „bemenő érték” változása közben).

Az alsó tagozat végére el kell érni, hogy a tanuló tudjon szavakkal adott összefüggést, kapcsolatot kifejezni különféle módokon:

- Elemek összekapcsolásával, szétválogatással, sorozatba rendezéssel, táblázatba rendezéssel. Helyesen, önállóan tudjon sorozatot, táblázatot folytatni szavakkal, formulával (nyíljelöléssel, nyitott mondattal) adott szabály szerint. Ismerjen fel összefüggéseket sorozat adott tagjai, táblázat adott elempárjai, elemhármasai között, ki tudja ezt fejezni a sorozat, táblázat különféle folytatásaival, kiegészítésével.
- Legyen képes a talált általános összefüggést megfogalmazni szavakkal, esetleg nyíljelöléssel, nyitott mondattal; ezeket tudja önállóan ellenőrizni az adatok behelyettesítésével. Ismerje fel az egyszerű (egy művelettel megadható szabályú) gép megfordításával nyert gép szabályát, két egyszerű gép összekapcsolásával nyert gép szabályát.

Az egyes feladattípusokat az 1. évfolyamtól fokozatosan kell bevezetni. A 2. évfolyamtól pedig újra és újra elővehetők például a gépek, a szabályjátékok fokozatosan nehezedő példákkal.

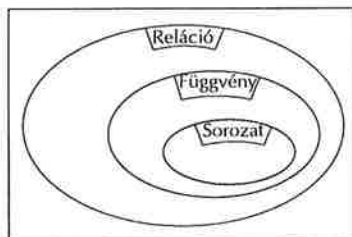
Mielőtt a részletes tárgyalásra rátérnénk, tisztáznunk kell a reláció, függvény, sorozat matematikai fogalmak pontos jelentéstartalmát, tudnunk kell, milyen viszonyban vannak egymással. A *reláció* személyek, tárgyak, számok, mennyiségek stb. közötti kapcsolatot, összefüggést jelent. Az úgynevezett binér reláció megadásakor egy A halmaz bizonyos elemeihez hozzárendeljük egy B halmaz egy vagy több elemét. Binér relációkat nem csak két különböző halmaz elemei között tudunk megadni, az A és B halmaz meg is egyezhet.

A relációt *függvénynek* (egyváltozós függvénynek) nevezzük, ha az A halmaz minden eleméhez egy és csak egy B -beli elemet rendelünk hozzá. (Bármely A -beli elem csak egyetlen B -beli elemmel van relációban.) Az A halmazt a függvény értelmezési tartományának, a B -nek azt a részhalmazát, melynek elemei a relációban szerepelnek, a függvény értékkészletének nevezzük.

A *sorozat* olyan speciális függvény, amelynek értelmezési tartományát a pozitív természetes számok alkotják, értékkészlete pedig tetszőleges nem üres halmaz.

A halmazábra jól szemlélteti a három fogalom viszonyát (5.1. ábra):

A továbbiakban a három fogalom (együtt három témakör) tanításával összefüggő tennivalókat foglaljuk össze.



5.1. ábra

5.1. Relációk tanítása

Az alacsonyabb–magasabb; gyorsabb–lassabb; hosszabb–rövidebb stb. relációkkal már az óvodában is találkozhatnak a gyerekek. A különböző dolgok különböző szempont szerinti összehasonlításakor tett megállapítások mindegyike egy-egy relációt határoz meg. Például a több–kevesebb–ugyanannyi vagy a kisebb–nagyobb–egyenlő relációk a számfogalom kialakításánál, illetve a számok sorba rendezésénél játszanak nagy szerepet.

A tanulói tapasztalatok megszerzéséhez nagyban hozzájárulnak a különböző eszközökkel (pálcikák, korongok, testek, képek, számkártyák, ...) végzett manuális tevékenységek.

Kisgyermekkorban már játszanak a gyerekek az úgynevezett hordóépítő készlettel, amellyel a nagyság szerinti rendezést gyakorolhatják. (5.2. ábra) Ez az összerakós játék a „belefért” reláción alapul. Nehézsége abban áll, hogy amíg a páronkénti összehasonlítást könnyen elvégzik a gyerekek, addig a már kialakított rendet újra meg kell bontani, ha javítani kell.



5.2. ábra

Úgy tudunk egy relációt megadni, hogy körülhatároljuk, hogy adott dolgok közül mik vannak adott viszonyban egymással. A körülhatárolás módja lehet az egymással relációban lévő dolgok felsorolása, összekapcsolása vagy egy nyitott mondat, amelynek igazsághalmaza adja meg a relációban lévő elemeket az adott alaphalmazon.

A relációs tulajdonságokra (reflexivitás, szimmetria, tranzitivitás) tudatosan kell példákat mutatni. Természetesen ezeket a kifejezéseket alsó tagozaton még nem használjuk.

A rendezési relációkra és az ekvivalenciarelációkra is adunk példákat, de magukat a fogalmakat nem vezetjük be. Rendezgetés közben lesznek olyan tárgyak, személyek, amelyek vagy akik ugyanolyan magasak, olyanok, akik egy utcában laknak, ugyanakkor van a születésnapjuk stb. A halmazokkal kapcsolatban az „ugyanannyi elemük van”, „ugyanannyi van belőlük”, vagyis az egyenlőség fogalmával ismerkednek meg a diákok.

A relációk szemléltetésére a matematikában nyíldiagramot, irányított gráfot, rácsot használunk.

Az összefüggések felismerésének és rendszerezésének tanítása a következő lépcsőfokokon halad keresztül:

- Egyszerű konkrét kapcsolatok megismerése, kifejezése tevékenységgel, rajzzal, szóban, az összetartozó elemek felsorolásával.
- Szavakkal vagy formulával adott relációk kifejezése a megfelelő elemek összekapcsolásával. Az elemek összekapcsolása történhet
 - » szóbeli felsorolással,
 - » tevékenységgel vagy rajzzal,
 - » nyíljelöléssel (nyíldiagramon vagy gráffal),
 - » relációjelekkel,
 - » táblázatba rendezéssel,
 - » grafikonos ábrázolással.
- Elempárokkal adott relációk felismerése, a felismert általános összefüggés kifejezése:
 - » további összetartozó elempárok keresésével,
 - » szóban,
 - » nyíljelöléssel,
 - » nyitott mondattal.

A továbbiakban ezeket a tanítási lépéseket példákkal illusztráljuk.

5.1.1. Egyszerű konkrét kapcsolatok megismerése, kifejezése tevékenységgel, rajzzal, szóban, összetartozó elemek felsorolásával

1. példa

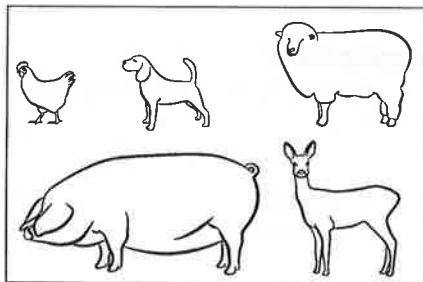
Figyeld meg, melyik vastagabb, a matematika könyved vagy a füzeted!

2. példa

Karikázd be, amelyik nem illik a többi közé! (5.3. ábra)

Megjegyzés:

Ahogy erről már korábban is volt szó (lásd 2.1.5. fejezet), az ilyen „kakukktojás” jellegű feladatoknak több megoldása lehet.



5.3. ábra

3. példa

Mit jelent a következő tábla? Sorolj fel olyan járműveket, amelyek behajthatnak az útra! (5.4. ábra)



5.4. ábra

Megoldás

A táblán feltüntetett vagy annál kisebb össztömegű járművel lehet csak behajtani, más megfogalmazásban: legfeljebb 10 t össztömegű járművekkel. Az ilyen típusú feladatnál egy állandó értékkel hasonlítjuk össze a többi elemet (autókat).

Megjegyzés:

A fenti példák mutatják, hogy a relációk témakörén belül látszólag eltérő típusú problémákat tárgyalhatunk.

5.1.2. Szavakkal vagy formulával adott relációk kifejezése a megfelelő elemek összekapcsolásával

Az elemek összekapcsolása szóbeli felsorolással

1. példa

Sorolj fel padeszomszédokat az osztály tanulói közül!

A nyitott mondatok tanítása szorosan összefügg ezzel a témakörrel (lásd 2.2.1. fejezet). Nyitott mondatok tanításakor két vagy több tárgy, személy, szám összehasonlítására, a köztük lévő kapcsolatok, összefüggések feltárására kerül sor.

2. példa

◊ ◯ előtt ül.

Tedd igazzá a nyitott mondatot!

Megjegyzések:

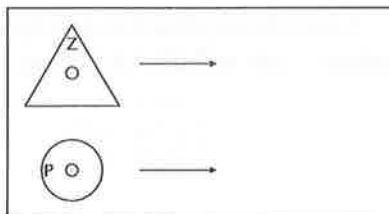
- Fel kell hívni a figyelmet arra, hogy míg az 1. példa szereplői felcserélhetők, addig a 2. példáé már nem.
- A 2. példát lehet, hogy a gyerekek nem egyformán értelmezik. Előfordulhat, hogy valaki nem a közvetlenül, hanem a kettővel előtte ülő nevét mondja.

Az elemek összekapcsolása tevékenységgel vagy rajzzal

A tanulók az 1. évfolyamon már megismerkednek a logikai készséggel, tudják, hogy hány tulajdonság alapján lehet csoportosítani a lapokat (szín, simaság, forma, nagyság). Az úgynevezett transzformációs játékokban az a feladat, hogy bizonyos szabály alapján változtatni kell a logikai készlet elemein.

3. példa

Tanítói utasítás: „Rakd ki a logikai készlet elemeiből telivel azt, amit én lyukas-sal!” (5.5. ábra)



5.5. ábra

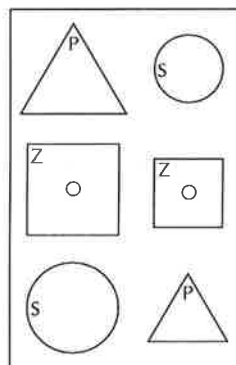
4. példa

Tanítói utasítás: „Én fentről lefelé rakom a nagy lapokat, ti letről felfelé rakjátok kicsikkel!” (5.6. ábra)

Megjegyzés:

Ezekkel a feladatokkal egyszerre a térszemléletet is fejlesztjük.

További transzformációs játékok azok, amelyek során az egymást követő elemek egy, illetve két tulajdonságban különböznek.



5.6. ábra

5. példa

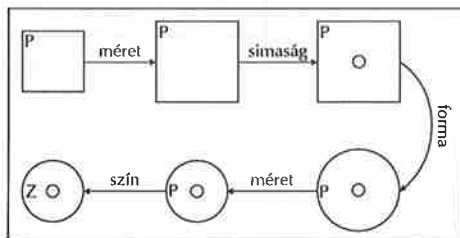
Rakd le a kis piros sima négyzetet! Folytasd az elemek lerakását úgy, hogy a lerakott elem mindig csak egy tulajdonságban térjen el az előzőtől!

Megoldás

A feladatnak több lehetséges megoldása is van, ezek közül egyet mutatunk meg. (5.7. ábra)

Megjegyzés:

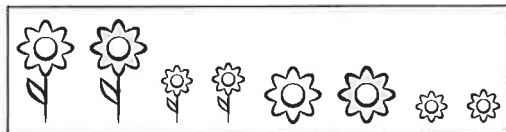
A 3–4. példákban egyértelmű volt a hozzárendelés, itt viszont nem az, de a több megoldás keresése is fontos.



5.7. ábra

Bármilyen, általunk készített logikai készlettel lehet játszani. Így a tanulóknak nem csak egyféle eszközre szűkül le a tudásuk. Ez azért fontos, mert a tanulók jobban tudnak általánosítani. Meg tudják állapítani, hogy milyen tulajdonságok alapján lehet csoportosítani, rendszerezni az elemeket. Egy ilyen logikai készlet megalkotása a kombinatorika témaköréhez is kapcsolódik.

A következő példában a virágokból készített logikai készlet tulajdonságai: száras – szár nélküli, kicsi–nagy; piros–kék. (5.8. ábra)



5.8. ábra

6. példa

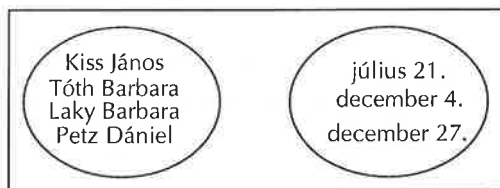
Rakj ki magad elé egy elemet a készletből! Folytasd az elemek lerakását úgy, hogy a lerakott elem mindig két tulajdonságban térjen el az előzőtől!

Az elemek összekapcsolása nyíljelöléssel

Az összetartozó elemeket gyakran nyilakkal kötjük össze. A nyíldiagram lényege, hogy külön halmazábrákba rendezzük a két halmaz elemeit, és a hozzárendelést a két elemet összekötő nyíllal jelöljük.

7. példa

Mikor van névnapjuk? Kösd össze a neveket a dátumokkal! (5.9. ábra)



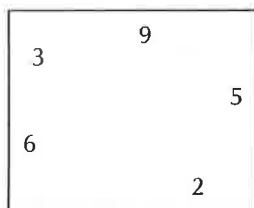
5.9. ábra

A gráfos ábrázolásmódot olyan esetekben alkalmazzuk, amikor a relációban szereplő két halmaz megegyezik. Ekkor a halmaz elemeinek a gráf pontjai felelnek meg, a köztük lévő kapcsolatot pedig irányított élek, azaz nyilak szemléltetik.

8. példa

A nyíl mindig a kisebb felé mutasson! Rajzoljuk be a nyilakat! (5.10. ábra)

Fordított feladat is készíthető: megvannak a nyilak, tudjuk a hozzárendelés szabályát, a tanulóknak pedig be kell írni a megfelelő elemeket.



5.10. ábra

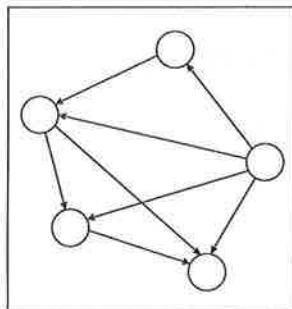
9. példa

Mutasson a nyíl kisebb szám felé! Keress számokat, és írd be a megfelelő helyre! (5.11. ábra)

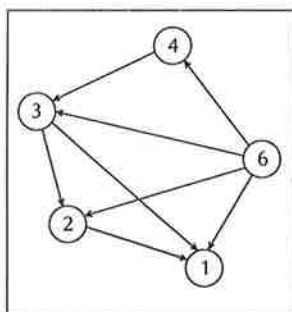
Megoldás

A feladatnak több megoldása van. A lehetséges megoldások megkereséséhez vizsgáljuk meg, melyik az a szám, amelyből csak kiindul nyíl és nem érkezik. Ez lesz a legnagyobb szám. A csökkenő sorrendben a következő számot arra a helyre kell beírunk, ahová csak egy nyíl érkezik. És így tovább folytatva.

Egy lehetséges megoldást az 5.12. ábrán láthatunk.



5.11. ábra



5.12. ábra

Megjegyzések:

- Ötnél több elemet ne ábrázoljunk, mert a behúzott nyilak száma olyan nagy lehet, hogy áttekinthetetlenné teszi az ábrát.
- A példában szereplő reláció rendezési reláció, ez az oka annak, hogy a nyilak elhelyezkedése alapján az elemeket sorba lehet rendezni.
- Nem szükséges feltétlenül az összes nyilat előre berajzolni, elegendő néhányat megadni, ezek alapján beírni az elemeket, majd további feladat lehet a hiányzó nyilak pótlása.
- Ez a feladattípus az ábrázolás összetettsége miatt a 3–4. évfolyamon ajánlott. A beírandó számok változhatnak a számkör bővítésével, lehetnek negatív vagy törtszámok is.

Az elemek összekapcsolása relációjelekkel

A két-két elem között lehetséges nagyságviszonyokkal alsó tagozaton kiemelten foglalkozunk. A *kisebb*, *nagyobb*, *egyenlő* relációk jelölésére már az 1. évfolyamtól kezdődően jeleket, ún. relációjeleket vezetünk be (lásd 1.1.1. fejezet). Először a kisebb ($<$), nagyobb ($>$) és az egyenlőség ($=$) jelét tanítjuk, majd összekapcsoljuk a két jelet: kisebb egyenlő ($\leq$), nagyobb egyenlő ($\geq$). Ezekkel a relációkkal a *legalább*, *legfeljebb* fogalmakat is alakítjuk.

A relációjelekkel különböző mennyiségek összehasonlításának eredményét is kifejezhetjük.

10. példa

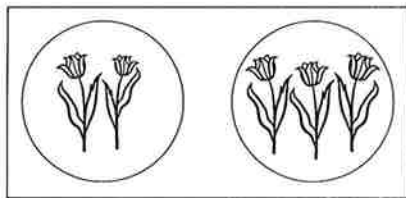
a) Tegyél le két színes rudat az asztalra, dönts el, hogy közülük melyik a hosszabb! Tedd közéjük a megfelelő relációjelet!

b) A $>$ relációjel mellé válassz két megfelelő rudat!

A következőkben arra adunk ötleteket, milyen példákön keresztül lehet alkalmazni a „relációs játékokat” folyamatosan nehezedő feladatokkal. A *több*, *kevesebb*, *ugyanannyi* relációk fontos szerepet játszanak a számfogalom alakításának kezdetén is (lásd 1.1.1. fejezet).

11. példa

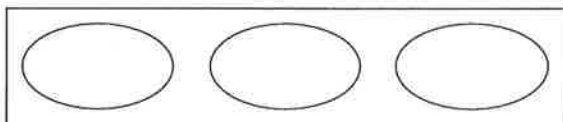
Melyik karikában látsz több virágot? Jelöld a $<$ jellel! (5.13. ábra)



5.13. ábra

12. példa

Helyezz el három karikát a padon! A jobb oldaliba tegyél 4 korongot, a középsőbe 3-mal kevesebbet, a bal oldaliba 6-nál 3-mal többet! Tedd ki a relációjeleket! Írd le a matematika nyelvén! Melyik karikában van a legtöbb korong? (5.14. ábra)



5.14. ábra

Megjegyzés:

A tárgyi tevékenységgel halmazok számosságának összehasonlítását végzik a gyerekek, közben figyelik a változásokat, a mennyiségi viszonyokat. A példában az összehasonlítás eredményének lejegyzése a matematika nyelvén: $9 > 1 < 4$.

Az alábbi nyitott mondatok megoldásával is a *több, kevesebb* relációk értelmezését gyakoroltatjuk (lásd 2.2.2. fejezet).

13. példa

Keress olyan számokat, amelyek igazzá teszik a nyitott mondatokat:

a) > 4

b) $8 \leq$ < 13

Megjegyzések:

- A kérdésfeltevésnél ügyelni kell arra, hogy milyen korosztálynak tesz-szük fel a kérdést. Az 1. évfolyamon még a „Keress olyan számot, amely...!” szövegezés azt mutatja, hogy meg kell elégedni azzal, ha találnak olyan számot, amely eleget tesz a kívánt feltételnek, nem tö-rekszünk az összes megoldás megkeresésére. 2. évfolyamtól már több megoldás keresése várható el, majd pedig az összes megoldás megke-resését kérjük. Ekkor a feladat utasítása: „Mely számok teszik igazzá a nyitott mondatot?”
- A fenti feladatok alkalmat adnak annak megvizsgálására, hogy melyik a legkisebb szám, amely még megfelel. Vagy esetleg melyik a legna-gyobb?

Az elemek összekapcsolása táblázatba rendezéssel

14. példa

Keress számokat, amelyekre az összefüggés teljesül! Írd be a táblázatba őket! (5.15. ábra)

The diagram shows a circle on the left with the text "összegük 20" above it. An arrow points from the circle to a small square. This square is positioned to the left of a 2x10 grid. The grid has two rows and ten columns. The top row contains ten circles, and the bottom row contains ten squares. The small square is aligned with the first column of the grid.

5.15. ábra

15. példa

Körrel jelöld a táblázat rácspontjai közül azokat, amelyekhez tartozó számok összege 8!

7					
5					
4					
3					
1					
	1	3	4	5	7

Az eredmények táblázatba foglalása segít kialakítani a rendezett írásképet, fejleszti a síkbeli tájékozódást, továbbá a matematikai gondolkodást: a diák együtt, rendszerben láthatja az eredményeket.

Az elemek összekapcsolása grafikonos ábrázolással

Az összefüggések ábrázolására szolgál a grafikon is. Alsó tagozaton ez a szemléltetési forma pont- vagy vonaldiagram készítésével, illetve elemzésével kapcsolatos feladatokban fordul elő.

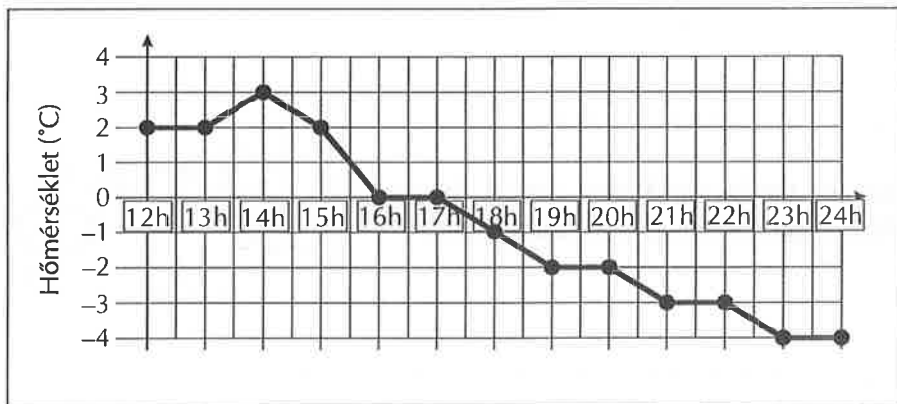
16. példa

Az alábbi táblázat azt mutatja, hogyan változott a hőmérséklet február egyik napján 12 és 24 óra között.

Időpont (óra)	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Hőmérséklet (°C)	2	2	3	2	0	0	-1	-2	-2	-3	-3	-4	-4

- Készíts grafikont, amely azt mutatja, hogy óráról órára hogyan változott a hőmérséklet!
- Olvasd le, hogy hány órákor volt a legmelegebb!

Megoldás



5.16. ábra

Megjegyzés:

Az ilyen típusú példák a negatív számok (lásd 1.6.1. fejezet) és a statisztika (lásd 4.2.1. fejezet) témaköréhez is kapcsolódnak.

5.1.3. Elempárokkal adott relációk felismerése, a felismert általános összefüggés kifejezése

A gondolkodás fejlesztése a fogalmak megértését is segíti. A megértés nagyrészt összefüggés-felismerést jelent, ami sok gyakorlás által fejleszthető. Ha már a táblázatok, elempár-együttesek, gráfok, nyíldiagramok, grafikonok a gyerekek gondolkodásában összefüggéseket jelentenek, akkor válhatnak az összefüggés-felismerő képesség alakításának eszközévé.

A kapcsolatkeresés fázisai:

- tájékozódás, próbálgatás,
- a talált összefüggés kifejezése,
- további összetartozó elemek megadása.

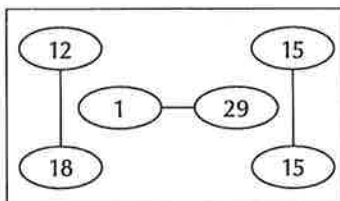
Az összetartozó elemek különválasztása a többtől segíthet a közös jegyek felfedezésében, és ezzel könnyíthetjük az összefüggés felismerését. A példa mellett az ellenpélda is egyenrangúan fontos. Figyeljünk arra, hogy nem „a” szabályt keressük, hanem egy vagy több szabályt. Hangsúlyozni kell a több megoldás lehetőségét, amely a kreativitás fejlesztésének egyik eszköze is. Nem biztos, hogy a tanulók mindegyike a tanító által várt összefüggést találja meg. A tanulók ötletét is ellenőrizni kell, meg kell nézni, hogy az összetartozó elempárok mindegyikére érvényes-e.

A felismert általános összefüggés kifejezése további összetartozó elempárok keresésével

1. példa

Adottak a következő számpárok (5.17. ábra):

Készíts táblázatot! Keress még a felismert összefüggésnek megfelelő számpárokat!



5.17. ábra

A felismert általános összefüggés kifejezése szóban

Az előző példa utasítását egészítsük ki a következőkkel: Milyen összefüggés van a számpárok között?

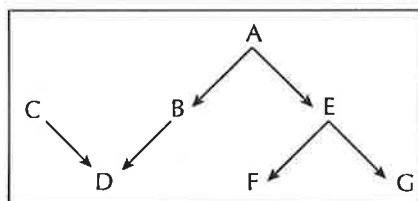
Az általános kapcsolatok, relációk világa a matematikán kívül és belül egyaránt kimeríthetetlenül gazdag. A gyermekek gondolkodását úgy fejleszthetjük, ha sokféle összefüggéssel ismertetjük meg őket.

A következő példa jó lehetőség az egyszerű rokon kapcsolatok megbeszélésére.

2. példa

A nyíl mindenkitől a lányára mutat (5.18. ábra).

Olvass le rokon kapcsolatokat a rajzról! Tedd igazgá a nyitott mondatokat!



5.18. ábra

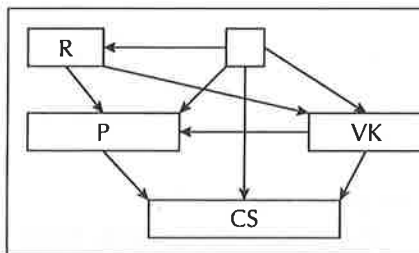
- G-nek A a _____.
- A-nak B a _____.
- C és E _____.
- F és G _____.
- D-nek F _____.

A felismert általános összefüggés kifejezése nyíljelöléssel

Korábban már láttunk példát nyíljelölésre, ekkor az összefüggés adott volt („Mutasson a nyíl ... felé!”), és annak megfelelően kellett megtalálni az összetartozó elempárokat. Most fordított a helyzet: összetartozó elempárokat adunk meg nyilakkal, és keressük az összefüggést, azaz a nyíl jelentését („Mit jelent a nyíl?”).

3. példa

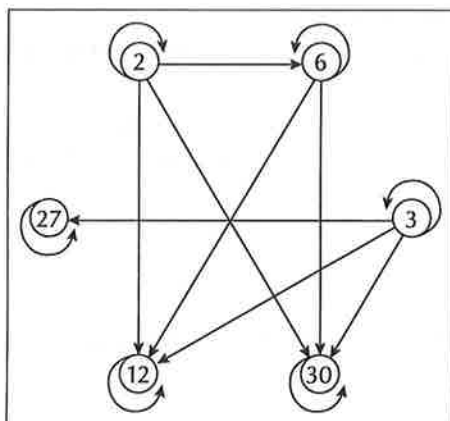
- a) Az ábrán színes rudak vannak. Mit jelent a nyíl? (5.19. ábra)
- b) Melyik a legrövidebb?
Melyik a leghosszabb?
Van-e két ugyanolyan hosszú?



5.19. ábra

4. példa

- Mit jelent a nyíl? (5.20. ábra)
- Mit jelentenének a fordított irányú nyilak?



5.20. ábra

A felismert általános összefüggés kifejezése nyitott mondattal

Kezdetben a szavakban történő megfogalmazást várhatjuk el a gyerekektől a hozzárendelési szabály megállapítására. Hosszú folyamat, mire eljutunk a nyitott mondattal történő lejegyzéshez. A szimbólumhasználat miatt csak a 3. évfolyamtól várható el a tanulóktól a nyitott mondat önálló felírása.

5. példa

Állapítsd meg a szabályt! Folytasd a táblázat kitöltését!

	3	6	9	5		7	4		=
	4	8	5	7	6		7		=
	12	48	45		36	42			=

Megoldás

Első lépésként az egy oszlopban lévő számok közötti összefüggés szóbeli megfogalmazását várjuk: a két felső szám szorzataként kapjuk meg a harmadik sorban lévő számot.

Ezt követően fogalmazzuk meg a hozzárendelési szabályt nyitott mondatlall: $\triangle = \square \cdot \bigcirc$.

Végül arra törekszünk, hogy az összefüggést más formában is kifejezzük: $\square = \triangle : \bigcirc$ vagy $\bigcirc = \triangle : \square$.

Megjegyzések:

- A felismert összefüggés több alakban kifejezhető mind szavakkal, mind nyitott mondatokkal.
- Az összefüggés felismeréséhez legalább három összetartozó elemhármaszt meg kell adni, de tudnunk kell, hogy a feladat megoldása ekkor sem feltétlenül egyértelmű.
- A példában szereplő reláció egyúttal függvény is.

5.2. Függvények tanítása

A relációk tanításának kérdései nem választhatók el élesen a függvények tanításától. A bevezetésben már megmutattuk, hogy a függvények speciális relációk, olyan egyértelmű hozzárendelések, amelyeknél az első halmaz minden eleméhez pontosan egy elemet rendelünk a második halmazból. Ezek a függvény típusú hozzárendelések kiemelt szerepet játszanak nemcsak a matematikában, hanem a mindennapi életben is, ezért a témakörön belül a függvényszerű kapcsolatok felismerésére, kifejezésére külön hangsúlyt fektetünk.

A függvényfogalom alsó tagozatos alakítása során arra törekszünk, hogy a tanulók minél több függvényszerű hozzárendelésről szerezzenek tapasztalatot. Nem szorítkozunk kizárólag a számfüggvényekre, foglalkozunk geometriai függvényekkel, más tantárgyakhoz, továbbá a mindennapi élethez köthető ún. tapasztalati függvényekkel is. Célunk elsősorban az, hogy a gyerekek ismerjék fel, hogy az élet különféle helyzeteiben egy adott halmaz elemei hogyan függenek egy másik halmaz elemeitől, és ez az összetartozás hogyan fejezhető ki. Természetesen későbbi matematikatanulmányaik szempontjából az is fontos, hogy a 4. évfolyam végére képesek legyenek a problémameg-

oldáshoz megfelelő függvényszemlélettel közelíteni, gondolkodásuk során a függvénykapcsolatok felismerését és kifejezését eszközként használni.

Alsó tagozaton az összefüggés-felismerő képességet kell fejleszteni. Feladat a kapcsolatok keresése, megértése, kifejezése, ábrázolása különféle (gyakorlati, más tantárgyakon, más matematikai témákon belüli) problémákban, szöveges feladatokban. A problémamegoldó képességet az is fejleszti, ha a meglévő kapcsolatokból továbbiakra (pl. az ellentétes irányú kapcsolatokra) következtetünk.

Ebben a fejezetben a függvények tárgyalása a relációkéhoz hasonlóan a következő lépésekben történik:

- Egyszerű, konkrét függvénykapcsolatok megismerése, kifejezése tevékenységgel, rajzzal, szóban, az összetartozó elemek felsorolásával.
- Szavakkal vagy formulával adott függvénykapcsolat (hozzárendelési szabály) kifejezése az összetartozó elemek meghatározásával.
 - » Szabályjátékok
 - » Egy- és kétbemenetű gépek
 - » Függvények inverze
 - » Összetett függvények
- Elempárokkal megadott függvénykapcsolat felismerése, a felismert hozzárendelési szabály kifejezése szavakkal vagy formulával.
 - » Szabályjátékok
 - » Egy- és kétbemenetű gépek
 - » Táblázatok kiegészítése adott vagy felismert szabály alapján
 - » Függvények inverze
- Függvényre vezető szöveges feladatok.

5.2.1. Egyszerű konkrét függvénykapcsolatok kifejezése tevékenységgel, rajzzal, szóban, összetartozó elemek felsorolásával

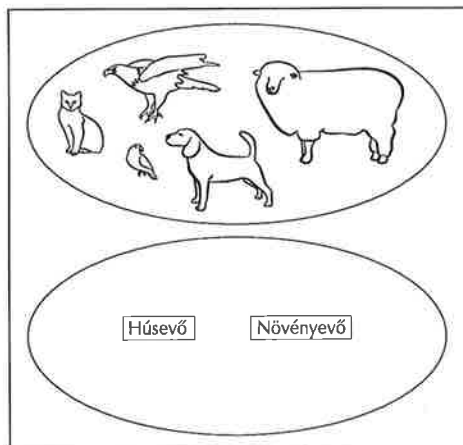
A tanulók függvényfogalmát – már az 1. évfolyamtól kezdődően – egyszerűbb dolog-dolog, dolog-szám, szám-dolog vagy szám-szám típusú hozzárendelések segítségével alapozhatjuk meg. Például ha az osztály minden tanulójaához hozzárendeljük a padját, akkor a tanulók és a padok halmaza között függvénykapcsolatot létesítünk, hiszen minden tanulóhoz kell rendelnünk pontosan egy padot.

1. példa

Kösd össze! (5.21. ábra)

Megjegyzés:

Az állatok halmaza és a táplálkozási módok halmaza között függvénykapcsolatot hozunk létre, mert mindegyik állathoz hozzá tudjuk rendelni a táplálkozási módok közül pontosan az egyiket.



5.21. ábra

A függvények között fontosak azok, amelyeknél számokhoz rendelnek számokat, de az alapozó munkában ennél sokkal fontosabb, hogy a gyerekek sokszínű példaanyaggal találkozzanak. A szám-szám függvényekhez keressünk valóságos problémákat, mondjunk hozzájuk történeteket, amelyeket az adott függvény írhat le. Olyan feladatra kell itt gondolni, amely valamilyen összefüggés felfedezésére vonatkozik.

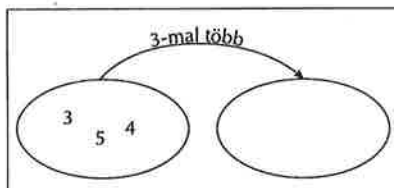
2. példa

Találjunk ki történeteket ehhez a hozzárendeléshez! (5.22. ábra)

Megoldás

Például: Peti és Laci futóedzésre járnak.

Laci két évvel idősebb, ezért neki minden edzésen 3 körrel többet kell futnia, mint Petinek. Mennyit kellett futnia Lacinak a héten, ha tudjuk, hogy Peti hétfőn 3, szerdán 5, pénteken pedig 4 kört teljesített?



5.22. ábra

Megjegyzés:

A matematikai modellalkotás képességét fejlesztjük, ha összevetjük és elemezzük a tanulók által ugyanannak a függvénykapcsolatnak a szemléltetésére kitalált történeteket.

5.2.2. Szavakkal vagy formulával adott függvénykapcsolat (hozzárendelési szabály) kifejezése a megfelelő elemek összekapcsolásával

Szabályjátékok

A függvények fogalmának tanításakor előkészítésként vagy a tanultak begyakorlására alkalmasak a különböző szabályjátékok, melyek a tanulók gondolkodását fejlesztik azáltal, hogy az összefüggések felismerésére nevelnek. A szabályjátékokban valamilyen hozzárendelési szabály alapján összetartozó elempárok (elemhármassok) szerepelnek. A való életben olyan problémákkal találkozunk, amelyeket nem lehet szabályok közé szorítani, de az iskolában mégis elsősorban a szabályokkal megragadható függvényekre szorítkozunk. Ennek két oka van. Egyrészt ezek főként képességfejlesztést (absztrahálás–konkretizálás, összefüggések meglátása – kiegészítés) szolgálnak, másrészt a matematikában megismert függvényekkel közelítjük a világ kevésbé szabályos történéseit. A matematikának igen sokszor jól hasznosítható módszere, hogy a nehéz, bonyolult problémát kicseréli valami egyszerűbbre.

A hozzárendelés szabályát kezdetben szavakkal, később már nyitott mondatokkal adjuk meg.

1. példa

A jobb oldalra tegyél a bal oldalnál mindig eggyel többet! (5.23. ábra)

2. példa

Töltsd ki a táblázatot a szabály alapján! (5.24. ábra)

I	II
II	III
III	

5.23. ábra

$\square$	$\bigcirc$	$\bigcirc = \square \cdot 2$
2		
3		
5		
7		
6		
8		
1		

5.24. ábra

A szabályjáték nemcsak egy-, hanem kétváltozós függvényekre is vonatkozhat.

3. példa

Töltsd ki a táblázatot a szabály alapján!
(5.25. ábra)

Megjegyzés:

Ha a hozzárendelési szabályt nyitott mondatlall adjuk meg, akkor az összetartozó értékek megkeresése valójában a nyitott mondat igazzá tételét jelenti. Ezzel a függvény fogalma mellett a nyitott mondat fogalmát (lásd 2.2.3. fejezet) is alakítjuk.

			$\bigcirc = \square \cdot 2 - \bigcirc$
2	2		
3	1		
5	5		
7	3		
6	7		
8	4		
1	1		

5.25. ábra

Egy- és kétbemenetű gépek

A szabályjátékok (és így a függvények) jól taníthatók olyan szemlélettel, hogy valamit megváltoztatunk. Ezt szemléltetni lehet a gépjáték (automata) segítségével. Az automata fontos tulajdonsága, hogy minden bemenő értéken ugyanazt a változtatást végzi el, azaz állandó függvénykapcsolatot létesít a bemenő és a kijövő érték között.

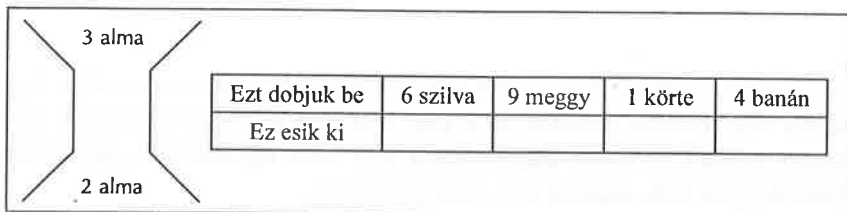
Hogyan játsszuk a gépjátékokat?

- Kezdetben valóban játsszák el a gyerek, hogy kartondobozból előre elkészített „gépbe” bedobják az értéket, tárgyat, és „kiesik valami”.
- A bemenő és kimenő értékpárokat foglaljuk táblázatba.
- Először tárgyakkal dolgozunk, utána jöhetnek a számok is.
- Fel kell hívni a figyelmet a táblázatok lezáratlanságára, vagyis arra, hogy a gyerekek maguk is kitalálhatnak további bemenő adatokat.
- Kereshetik a bemenő adatot ismert kimenő adat alapján, ez a függvény inverzének alkalmazását jelenti.

A gépjátéknak lehet egy- és kétbemenetű változata, azaz szemléltethet egy- vagy többváltozós függvényt.

4. példa

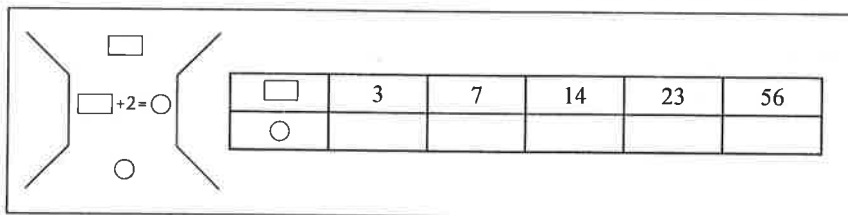
Ez a gép 1-et elvesz abból, amit bedobsz (5.26. ábra). Rajzold le, hogy mit dob ki!



5.26. ábra

5. példa

Hogyan működik a gép? Töltsd ki a táblázatot a szabály alapján! (5.27. ábra)



5.27. ábra

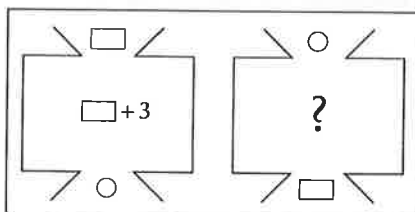
Megjegyzés:

Az ilyen típusú feladatok alkalmasak az összeadás, kivonás, szorzás, osztás gyakorlására, valamint a műveletek közötti összefüggések felismerésére.

A gépjátékok segítenek az inverz függvény fogalmának megértésben is.

6. példa

Milyen szabály alapján működik a gép, ha fordítva kapcsoljuk be? (5.28. ábra)



5.28. ábra

Megoldás

Ha a szabály az, hogy a bemenő adathoz hozzáadunk 3-at, akkor fordított állásban 3-mal kisebb számot kapunk kimenő adatként, tehát a szabály: $\bigcirc - 3$.

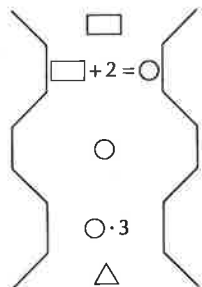
Megjegyzés:

Vannak olyan gépek, amelyek nem fordíthatók meg, azaz nem minden függvénynek van inverze. Például ha a gép szabálya az, hogy összeadja a két bedobott számot, akkor a megfordítása már nem egyértelmű: egy számot többféleképpen felbontatunk két szám összegére.

A gépjátékszemplélet az összetett függvények tanítását is megkönnyíti az alsó tagozaton. Ha két gépet úgy kapcsolunk össze, hogy az első gép kimenete a második gép bemenete legyen, összetett függvényhez jutunk.

7. példa

Töltsd ki a táblázatot! (5.29. ábra)



$\square$	1	2	3	4	5	6
$\bigcirc$	3	4				
$\triangle$	9	12				

5.29. ábra

Mi lehet a szabálya annak a gépnek, amelyik ezt a kettőt összekapcsolja?

Megoldás

Az összekapcsolt gép szabálya: $\triangle = (\square + 2) \cdot 3$.

5.2.3. Elempárokkal megadott függvénykapcsolat felismerése, a felismert hozzárendelési szabály kifejezése

A szabályfelismerő, összefüggés-felismerő képesség fejlesztésében úgy segíthetünk, ha világosan kifejezzük, melyek az összetartozó értékek. Ez történhet táblázatba foglalással, nyíldiagramos vagy grafikonos ábrázolással.

Semmiképpen nem szabad erőltetni, siettetni az összefüggés felismerését. Nem gondolatolvasást tanítunk; segítsünk, vezessük rá a gyerekeket az összefüggések meglátására:

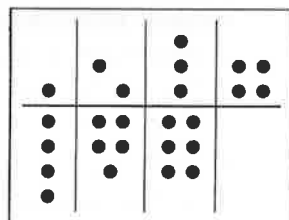
- Változatos legyen a felismerésre váró összefüggések sora.
- Az elfogadó légkör és a társak példája fontos. Nem minden gyereknek mozog ugyanolyan gyorsan az agya. Van, akinek több időre van szüksége egy-egy összefüggés felismeréséhez.
- A mondott szabályt mindig ellenőrizzük behelyettesítéssel. Ne rögtön fogadjuk el a helyes választ, hanem az esetleg lemaradó gyerekekkel ellenőriztessük, hogy jól mondott-e a másik tanuló.
- Miután a függvényt nem adja meg egyértelműen néhány összetartozó értékpár, ne ragaszkodjunk mereven saját elképzelésünkhöz, fogadjuk el a választ akkor is, ha a tanuló más összefüggést fedez fel, mint amire mi gondoltunk.
- Ne csak néhány szabály felismerését gyakoroljuk be alaposan, nem ez jelenti az összefüggés-felismerő képesség fejlesztését. Kreativitást fejlesztenek az olyan céllal kitűzött feladatok, ahol direkt több megoldást, többféle hozzárendelési szabályt kerestetünk.
- Ne siettessük a felismert összefüggés nyitott mondattal történő kifejezését, néhány gyereknek még nehéz lehet a szimbolikus leírás.

Ha néhány összetartozó értékpár alapján sikerül valamilyen hozzárendelési szabályt felismerni, ez alapján folytatjuk az összetartozó értékek meghatározását.

Szabályjátékok

1. példa

Mi lehet a szabály? Folytasd a rajzolást! (5.30. ábra)



5.30. ábra

Megjegyzés:

A szabályjáték felírásánál lehet változtatni az összetartozó elemek elhelyezését (itt nem vízszintesen, hanem függőlegesen vannak az elempárok).

A szabályok megadása általában nehezen megy. 1. évfolyamon inkább újabb példát mondanak a gyerekek, mintsem el tudják magyarázni a szabályt.

Kezdetben a felismert hozzárendelési szabályt saját szavaikkal fogalmazták meg a tanulók. Az 1. példában például „mindig hárommal több kavics kerül alulra”.

A későbbiekben igyekszünk a szabályt valamilyen jelölésrendszert használva formulával is megadni. Így a szimbólumhasználatot és az absztrakt gondolkodást készítjük elő, miközben elmélyítjük a nyitott mondat fogalmát is. Ehhez kezdetben a változókat háromszög, négyszög stb. szimbólumokkal jelöljük. Ezeket a jeleket a gyerekek könnyen rajzolják, ők is kitalálhatnak nekik tetsző alakzatot.

A felismert szabályt többféleképpen is fogalmaztassuk meg.

2. példa

Írd fel a szabályt többféle alakban, majd egészítsd ki a táblázatot!

	300	400	120		
	650	550		660	

Megoldás

A szabály lehetséges felírási módjai:

$$\bigcirc = 950 - \square$$

$$\square = 950 - \bigcirc$$

$$\square + \bigcirc = 950$$

$$950 - \square - \bigcirc = 0$$

Megjegyzések:

- Az első két szabály explicit formájú, mert az egyik ismeretlent közvetlenül határozhatjuk meg a másik ismeretében, míg a második két szabály implicit, hiszen egyik ismeretlent sem fejeztük ki.
- A feladat alkalmas az összeadás tulajdonságainak felfedeztetésére is: megfigyeltehető, hogy az egyik tag csökkenésekor a másik tagnak nőnie kell, hogy az összeg ugyanaz maradjon.
- A szabály többféle alakban történő felírásával, valamint azzal, hogy nemcsak a bemenő érték ismeretében kérjük a kimenő értéket, hanem

fordítva is, az inverz függvény fogalmát alakítjuk. Ezzel egyúttal a műveletek és inverzeik kapcsolatát is mélyítjük.

A tantárgyak közötti koncentráció példaként lehet olyan szabályjátékot készíteni, amelyben nem számok, hanem szavak szerepelnek:

3. példa

Mi lehet a szabály? Töltsd ki a táblázatokat!

a)

☐	ráz	rak	bab		
☐	zár	kar		kép	

b)

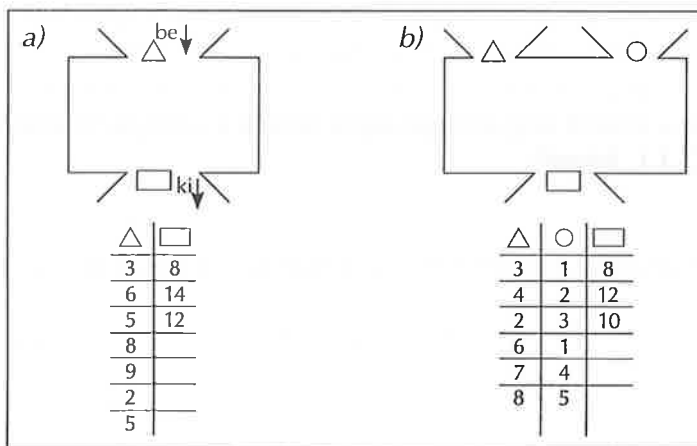
☐	írok	raktam	lépek		
☐	írsz	raktál		zenéltél	

Egy- és kétbemenetű gépek

A gépjátékokat természetesen úgy is használhatjuk, hogy nem a tanító adja meg a szabályt, hanem a diákokkal akarja felfedeztetni. Csupán a feladat megfogalmazásán kell változtatni: a szabály felismerését a „Hogyan működik a gép?” kérdéssel kérhetjük.

4. példa

Hogyan működik a gép? Folytasd a táblázat kitöltését! (5.31. ábra)



5.31. ábra

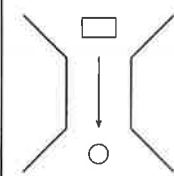
Megjegyzés:

A b) feladatban két bemenő változó van, tehát kétváltozós függvényt jelenít meg.

A gépjátékok szorosan összefüggnek a táblázatos jelöléssel, hiszen az összetartozó értékpárokat rendszerint táblázatba gyűjtjük. Ezzel rendezettebbé, átláthatóbbá válik a munka.

5. példa

Mi lehet a gép szabálya? Folytasd a táblázat kitöltését a felismert szabály szerint! (5.32. ábra)

		3	45	21	18	9			
		6	90				10	32	

5.32. ábra

Megjegyzés:

Azzal, hogy a táblázatban nemcsak a felső, hanem az alsó sorban is vannak üres helyek, az inverz kapcsolat megvalósítását kérjük a tanulóktól. Az utolsó oszlopban pedig tetszőleges összetartozó értékpár megadását várjuk.

5.2.4. Függvényre vezető szöveges feladatok

A gyerekeknek a szöveges feladatok elemzésekor a szövegből kell kikeresni két vagy több változó közötti összefüggést, majd a talált összefüggést alkalmazva meghatározni az összetartozó értékeket. Az ilyen típusú feladatok megoldása a fentebb tárgyalt képességek mellett a szövegértés képességét is fejleszti (2.3.1. fejezet).

1. példa

- a) A két zsebemben együtt 15 Ft van. A balban 5 Ft van, mennyi van a jobban?
- b) A két zsebemben együtt 15 Ft van. Hány forint lehet a zsebeimben külön-külön?

Megjegyzések:

- Az 1. évfolyamon a feltételnek megfelelően kirakott korongokkal is megoldhatjuk a megoldást.
- A b) feladatnak nem csak egy megoldása van, minden olyan számpár jó, amelyek összege 15. Ez a feltétel egyértelmű kapcsolatot ír le a számpárok között. A megoldásokat táblázatba foglalva, rendszerezetten adjuk meg.
- A kisgyerekek még nem tudnak lehetőségekben gondolkodni, csak konkrét esetekben, ezért fontos, hogy minden megoldás legyen kirakható. Tehát ha a zsebeimben lévő pénzürmék összege 15 Ft, akkor a $0 + 15$ esetet nem biztos, hogy elfogadják, hiszen úgy gondolják, hogy mindkét zsebemben kell lennie pénznek. Nem szabad túl korán erőltetni a matematikai kiterjesztést.

2. példa

Eszternek háromszor annyi babája van, mint Anginak.

Hány babája van a két lánynak a különböző esetekben? Töltsd ki a táblázatot!

Angi babáinak száma	Eszter babáinak száma
1	
6	
	6
	18

A fenti példákban olyan feladatokkal találkoztunk, ahol több megoldás is előfordulhat. Ügyeljünk azonban arra is, hogy csak a reális, a való életnek megfelelő megoldásokat fogadjuk el.

3. példa

Három testvér általános iskolába jár. Hány évesek lehetnek, ha összesen 26 évesek? (Az éveket egész számoknak tekintjük, és a már betöltött éveket nézzük.)

Megoldás

Nyilván nagyon sok lehetőség van, de például az, hogy valamelyikük 1 éves legyen, nem elfogadható, hiszen tudjuk, hogy mind a három testvér általános iskolába jár, tehát legalább 6 évesek. Az is előfordulhat, hogy közülük ketten egyidősek.

A lehetséges számhármasokat célszerű rendszerezetten megadni:

6	6	6	6	6	7	7	7	8	8
6	7	8	9	10	7	8	9	8	9
14	13	12	11	10	12	11	10	10	9

5.3. Sorozatok tanítása

A sorozatok értelmezésénél támaszkodunk a függvény fogalmára. A mindennapi életben sorozatról beszélünk, ha valamely elemek egyértelműen meghatározott sorrendben követik egymást, azaz a sorszámmal hozzárendeljük azt az elemet, amelyik ennyiedik helyen áll.

A sorozatok tanításának célja kettős: fejleszti a tanulók rendszerező, összefüggés-felismerő képességét, ugyanakkor segíti más matematikai témakörhöz kapcsolódó tartalmak mélyebb megértését is.

Egy sorozatot többféle módon adhatunk meg. Alsó tagozaton leggyakrabban az első néhány egymást követő taggal megadott sorozatokkal találkozunk. Ez a mód természetesen nem egyértelmű, hiszen a megadott tagok között többféle összefüggés is felfedezhető, így a sorozat is többféleképpen folytatható. Ám éppen ezért alkalmas arra, hogy a tanulók kreativitását fejlesszük azáltal, hogy a sorozat többféle folytatására ösztönözzük őket.

Megadhatjuk a sorozatot úgy is, hogy tetszőleges tagját annak sorszámmalhoz rendelt összefüggéssel fejezzük ki. Például a sorozat minden tagja sorszámanak 3-szorosánál 2-vel nagyobb szám ($a_n = 3n + 2$), így a tagok: 5, 8, 11, ...

A rekurzív megadási mód (visszavezetés) azt jelenti, hogy a sorozat tagjait az őket megelőző tagokból képezzük egy jól meghatározott szabály szerint. Például legyen a sorozat első tagja 2, a második tagja pedig 3. A további tagokat úgy képezzük, hogy a megelőző két tag összegének kétszeresét vesszük: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n = 2(a_{n-2} + a_{n-1})$, így a tagok: 2, 3, 10, 26, ...

Ez utóbbi két megadási mód a sorozatot egyértelműen meghatározza.

5.3.1. Sorozatok osztályozása

Attól függően, hogy a sorozat tagjai milyen halmazba tartoznak, alsó tagozaton a sorozatokat három nagy csoportba soroljuk, ezek a tárgysorozatok, a jelsorozatok és a számsorozatok.

Tárgysorozatok

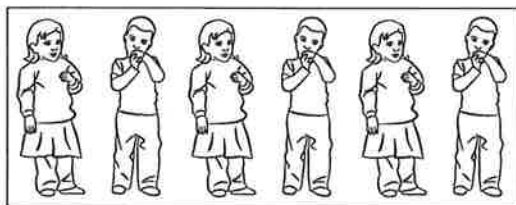
A sorozat tagjai tetszőleges tárgyak, élőlények lehetnek. Képzésükhöz mindig valamilyen tárgyi tevékenység társul. Alkothatunk sorozatot hétköznapi tárgyakkból, a logikai készlet vagy a színesrúd-készlet elemeiből, de akár az osztály tanulóiból is. A hangsúly a tevékenységen, az egymást követő tagok közötti összefüggés megértésén, felismerésén van.

1. példa

A napköziben úgy álltak sorban a gyerekek, ahogy a képen látod. (5.34. ábra)

a) Sorold fel, hogy hányadik helyeken állnak a lányok!

b) Sorold fel, hogy hányadik helyeken állnak a fiúk!



5.33. ábra

Jelsorozatok

A jelsorozatok egyszerű ábrák, grafikus jelek alkotják. A hétköznapi életben és más tantárgyak tanulása során egyaránt találkozunk velük.

2. példa

Rajzold le a füzetedbe, és folytasd a körök sorozatát a lap széléig! (5.34. ábra)



5.34. ábra

Számsorozatok

A számsorozatok tagjai valamely számhalmaz elemei. A számsorozatok alkalmazásánál mindig figyelniük kell arra, hogy a sorozat tagjai benne legyenek (maradjanak) abban a számkörben, amelyben a tanulók az adott évfolyamon dolgoznak. A számsorozatok tanításának célja kettős: a sorozat fogalmának alakítása mellett a számok közötti kapcsolatok elmélyítését is szolgálja. Éppen ezért a számsorozatok között kiemelt szerepet kapnak azok, amelyeknél a képzési szabály megalkotásához a négy alapművelet valame-

lyikére vagy akár többre is szükség van. A későbbi matematikai tanulmányok miatt is fontos külön foglalkozni a következő két nagy csoporttal.

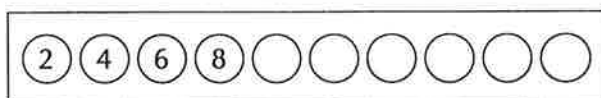
Különbségsorozatok

A képzési szabály összeadásra és/vagy kivonásra épül. Megkülönböztetjük az állandó és a változó különbségű sorozatokat aszerint, hogy az egymást követő tagok különbsége állandó, vagy pedig valamilyen szabály szerint változik.

Az állandó különbségű sorozatok képzésével előkészíthető a szorzótáblák tanítása. A következő sorozattal a 2-es szorzótábla számait határozzuk meg.

3. példa

Tegyél hozzá mindig 2-t! (5.35. ábra)



5.35. ábra

Amennyiben a sorozat nem az állandó különbségnek megfelelő számmal, hanem annál kisebbel indul, az adott állandó különbségnek megfelelő osztás egy-egy maradékosztályának elemeihez jutunk.

Például: Az 5-tel osztva 1, 2, 3 vagy 4 maradékot adó számok sorozatai olyan állandó különbségű sorozatok, ahol a különbség 5:

1, 6, 11, 16, 21, ...

2, 7, 12, 17, 22, ...

3, 8, 13, 18, 23, ...

4, 9, 14, 19, 24, ...

A változó különbségű sorozatok képzési szabálya nem az egymást követő tagok különbségére, hanem ezen különbségek közötti összefüggésre vonatkozik.

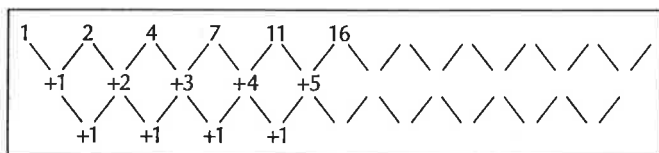
4. példa

Mi lehet a szabály? Folytasd a sorozatot!

2, 5, 6, 9, 10,

5. példa

Folytasd a sorozatot jelzett szabály szerint! (5.36. ábra)



5.36. ábra

Megjegyzés:

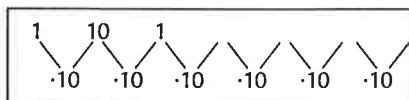
Ezt az összetett sorozatot szokás második különbségű sorozatnak nevezni. A szomszédos tagok különbsége változó (mindig 1-gyel nő), de a különbségek közül képzett sorozat szomszédos tagjainak különbsége már állandó.

Hányadossorozatok

A képzési szabály szorzásra és/vagy osztásra épül. Megkülönböztetjük az állandó és a változó hányadosú sorozatokat aszerint, hogy az egymást követő tagok hányadosa állandó, vagy pedig valamilyen szabály szerint változik.

6. példa

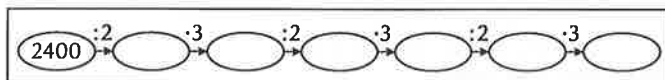
Folytasd a sorozatot! (5.37. ábra)



5.37. ábra

7. példa

Folytasd a sorozatot a megadott szabály szerint! (5.38. ábra)



5.38. ábra

5.3.2. Sorozatok tulajdonságai

Alsó tagozaton két tulajdonsággal, a periodicitással és a monotonitással foglalkozunk.

- Egy sorozatot akkor nevezünk periodikusnak (ismétlődőnek), ha egymást követő tagjai valamilyen szabály szerint rendre ismétlődnek.
- A periodicitást bármilyen típusú sorozatra értelmezhetjük, sőt sok eset-

ben éppen ez a tulajdonság határozza meg a képzési szabályt, különösen a tárgy- és a jelsorozatoknál.

1. példa

A felismert szabály alapján folytasd a sorozatot még 8 taggal! (5.39. ábra)



5.39. ábra

A monotonitás csak számsorozat tulajdonsága lehet. Megkülönböztetünk növekvő és csökkenő számsorozatokat. A növekvő sorozat bármely két egymást követő tagjára igaz, hogy a nagyobb sorszámú tag nem lehet kisebb az őt megelőző tagnál. Fordítva, a csökkenő sorozatokra pedig az jellemző, hogy bármely két egymást követő tagja közül a második nem lehet nagyobb az elsőnél.

Alsó tagozaton gyakran adunk olyan feladatot, amelyben egy számsorozat tagjait kell növekvő vagy csökkenő sorrendbe rendezni.

2. példa

Írd fel a számokat növekvő sorrendben!

10, 7, 13, 4, 16, 1, 19, 25, 22, , , , ,

Találsz-e valamilyen szabályt a számok között? Ha igen, akkor folytasd még 5 taggal!

A növekedés vagy csökkenés ütemét, sebességét vizsgálhatjuk a következő feladattípussal.

3. példa

A két sorozat közül melyik éri el előbb az 1500-at?

a) 100, 200, 300, 400, 500, ...

b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Megoldás

Az a) sorozat egymást követő tagjai mindig 100-zal nőnek, így ez egy állandó különbségű növekvő sorozat. A 15. tagja lesz egyenlő 1500-zal.

A b) sorozat állandó hányadosú, növekvő, az egymást követő tagok mindig duplázódnak. A kezdeti lassú emelkedés után hamarabb éri el az 1500-at (a 12. tag már 2048), gyorsabban nő.

5.3.3. Összefüggés keresése sorozat tagjai között

Egyszerű konkrét kapcsolatok megismerése, kifejezése tevékenységgel, rajzzal, szóban

A sorozat fogalmának kialakítását a tárgy- és jelsorozatokra vonatkozó tevékenységekkel kezdjük.

Előkészítő feladatként különböző mintákat tekintünk. A jelek adott szabály szerint követik egymást, például körök a füzet alján (5.40. ábra):



5.40. ábra

A halmazoknál tárgyalt saját szempontú válogatásokhoz hasonlóan (lásd 2.1.5. fejezet) sorozatokat is képezhetnek a gyerekek saját szempont szerint. Első lépésben kigondolnak egy képzési szabályt, majd annak megfelelően alkotják meg a sorozatot. Például: Az egyik tanuló egymás után kihívja a tábla elé 4 osztálytársát, majd a többiek megpróbálják kitalálni, hogy milyen szabályra gondolt a társuk, míg a gyerekekből álló sorozatot megalkotta.

Kreativitást fejlesztő feladat, amikor azt kérjük, hogy az első néhány elem ismeretében minél többféle sorozatot készítsenek a tanulók.

1. példa

Folytasd az 1, 2, 4, ... sorozatot 5-5 taggal legalább 5 különböző szabály szerint!

1, 2, 4,

1, 2, 4,

1, 2, 4,

1, 2, 4,

1, 2, 4,

Középkezdésű sorozatról akkor beszélünk, ha nem mondjuk meg, hogy milyen irányban kell folytatni a sorozatot, ilyenkor rendszerint úgy értjük, hogy balra és jobbra is folytatni kell.

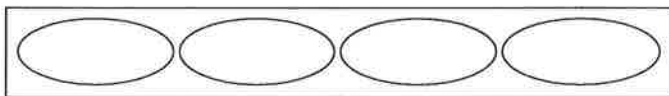
Folytasd a sorozatot három-három taggal!

Sorozat folytatása adott szempont szerint

Kezdetben a sorozat képzési szabályát szavakkal adjuk meg.

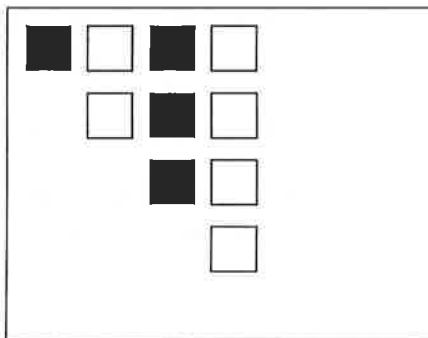
Az első karikába rakj 5 babszemet, majd a következőbe mindig 2-vel többet!

(5.41. ábra)



5.41. ábra

Először rajzolj egy fekete négyzetet, majd két fehér négyzetet! Folytasd a sorozatot úgy, hogy a négyzetek színe felváltva fekete és fehér, a számuk pedig eggyel nő! (5.42. ábra)



5.42. ábra

Folytasd a sorozatot még 10 taggal úgy, hogy mindig egyet-egyed adsz az előző három taghoz!

2, 3, 4, __, __, __, __, __, __, __, __, __

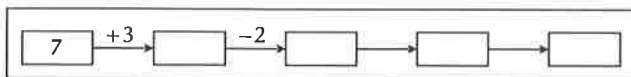
A szabály az, hogy az utoljára leírt számból vonj ki 9-et! A sorozat 73-mal kezdődik. Folytasd!

73, __, __, __, __, __, __, __, __

A képzési szabály megadására alkalmazhatjuk az 5.1.2. fejezetben megismert nyíljelölést is.

7. példa

Folytasd a sorozatot a nyilakra írt utasítások alapján! (5.43. ábra)



5.43. ábra

Megjegyzés:

Az előbbi példában változó különbségű növekvő sorozat szerepel. A sorozat megadásának módja rekurzív.

A tagok közötti összefüggés felismerése, a felismert képzési szabály kifejezése

A feladatokban szereplő sorozatokat néhány tagjuk felsorolásával adjuk meg, s a feladat minden esetben a köztük lévő összefüggés, a sorozat képzési szabályának felismerése.

A felismert összefüggés kifejezését fokozatosan nehezedő formában várjuk el. Első lépésként elegendő, ha a tanulók képesek a sorozat folytatására. Ezt követően kérjük, hogy a felismert szabályt fogalmazzák meg saját szavaikkal. Ezután alkalmazhatunk a szabály leírására valamilyen jelrendszert, esetleg formulát.

8. példa

Folytasd a sorozatot még 6 taggal! (5.44. ábra)



5.44. ábra

Hányadik helyen áll háromszög?

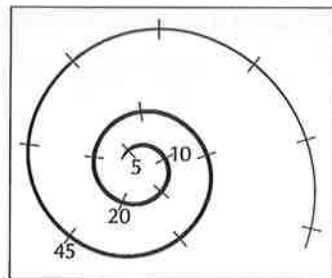
Hányadik helyen áll nagy kör?

9. példa

Melyik számok hiányoznak? (5.45. ábra)

Megjegyzés:

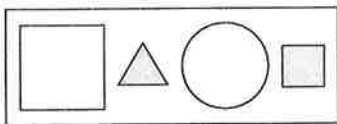
Ebben a feladatban közbülső elemek is meg vannak adva, ezekkel a felismert szabály helyességét ellenőrizhetjük.



5.45. ábra

10. példa

Folytasd a sorozatot a felismert szabály alapján! (5.46. ábra)



5.46. ábra

Megjegyzés:

Sok esetben több megoldás is elfogadható a feladatoknál. A fenti példában is előfordulhat, hogy valaki csak a szín változását nézi. Másvalaki a színt és a méretet együtt vizsgálja. A legfigyelmesebbek azt is észreveszik, hogy az alakzatok változásában is van ismétlődés (négyzet, háromszög, kör, négyzet, ...).

11. példa

Mi lehet a szabály? Fogalmazd meg saját szavaiddal, majd folytasd a sorozatot 5 taggal!

12, 24, 36, 48, , , , ,

Megjegyzés:

A feladattal a szóbeli műveletek végzését is gyakoroltatjuk. Ha további kérdéseket teszünk fel, például: „Melyik szám áll a negyedik helyen?”, „Ez a 12-nek hányszorosa?”, „A 12 a 48-nak hányadrésze?”, akkor a műveletek közötti összefüggésekről, a műveleti tulajdonságokról is tapasztalatokat szereztethetünk.

A sorozat képzési szabályának meghatározását nemcsak szóban kérhetjük, hanem úgy is, hogy a nyilakra kell a tanulóknak felírni a kitalált szabályt. (Ez nem szóbeli megfogalmazás, de nem is képlet.)

12. példa

Mi lehet a szabály? Folytasd öt taggal! (5.47. ábra)



5.47. ábra

13. példa

Számítsd ki az 1, 4, 7, 10, ... sorozat 5., 8., 10. tagjait!

A sorozat tagjainak felírása nélkül határozd meg a 20. tagot!

Megjegyzés:

A feladat azzal, hogy közvetlenül a 20. tag felírását is kéri, alkalmas a sorozat általános tagjának meghatározására. Alsó tagozaton erre még képletet nem használunk, a képzési szabályt a tanulók saját szavaikkal adják meg.

Ahhoz, hogy a gyerekek, a későbbi életben egy bizonyos probléma megoldásakor a sorozatot modellként alkalmazzák, kétirányú kapcsolatépítésre van szükség. Tudniuk kell adott sorozathoz szöveget, problémaszituációt konstruálni, vagy fordítva: adott problémát megoldani a sorozatmodell alkalmazásával.

14. példa

Dani futóversenyen indult. 10 kört kellett futnia. Az első kört 3 perc alatt tette meg, ezt követően minden körben 5 másodperccel lassabban haladt, mint az előzőben. Mennyi idő alatt tette meg az utolsó kört? Mennyi idő alatt futotta le a teljes távot?

Megoldás

Írjuk fel a köridők sorozatát másodpercekben számolva:

180, 177, 174, 171, 168, 165, 162, 159, 156, 153.

A 10. kört tehát 153 másodperc = 2 perc 33 másodperc alatt tette meg Dani.

A teljes táv lefutásához szükséges időt megkapjuk, ha összeadjuk a sorozat első tíz tagját:

$$180 + 177 + 174 + 171 + 168 + 165 + 162 + 159 + 156 + 153 = 1665.$$

Dani 1665 másodperc alatt, azaz 27 perc 45 másodperc alatt futotta le a teljes távot.

IRODALOM

- Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2004.
- Bíró Jenő: Szöveges feladatok megoldásának tanítása az általános iskola alsó tagozatában. Tanító, XXXVIII. évfolyam, 2. szám, 2000.
- C. Neményi Eszter, Szendrei Julianna: Szöveges feladatok. Matematika tantárgypedagógiai füzetek, Budapesti Tanítóképző Főiskola, 1997.
- C. Neményi Eszter: Geometria tananyag és a geometria tanulása az alsó tagozaton. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2010.
- Czeglédy István (szerk.): Matematika tantárgypedagógia I. Calibra Kiadó, Budapest, 1994.
- Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát. Gondolat Kiadó, Budapest, 1973.
- English, Lyn D.: Children's Strategies for Solving Two- and Three-dimensional Combinatorial Problems. In: Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 24, No. 3, 1993. (255–273.)
- Hajduné Holló Katalin: Az elemi kombinatív képesség korrekt feltárása. In: Nagy József: Kompetenciaalapú kritériumorientált pedagógia. MOZAIK Kiadó, Szeged, 2007. (233–250.)
- Herendiné Kónya Eszter: A tanítójelöltek geometriai gondolkodásának jellegzetességei. Iskolakultúra, 12. kötet, 2003. (51–61.)
- Herendiné Kónya Eszter: Kisiskolások térbeli tájékozódó képességének fejlesztési lehetőségei (PhD-értekezés). Debreceni Egyetem, Debrecen, 2007.
- Holt, John: Iskolai kudarcok. Gondolat Kiadó, Budapest, 1990.
- Kürti Jarmilla: Kreativitásfejlesztés kisiskoláskorban. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
- Lovász László, Pelikán József, Vesztergombi Katalin: Kombinatorika. Typotex Kiadó, Budapest, 2003.
- Mérei Ferenc, Binét Ágnes: Gyermekleléktan. Gondolat Kiadó, Budapest, 1983.
- Mosonyi Kálmán: Gondolkodási hibák az általános iskolai matematikaórán. Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.
- Nagy József: Kompetenciaalapú kritériumorientált pedagógia. MOZAIK Kiadó, Szeged, 2007. (251–268.)
- Németh Lászlóné, Seregély Istvánné: Szókincstár. Apáczai Kiadó, Celldömölk, 2000.

- Pálfalvi Józsefné: Matematika didaktikusan. Typotex Kiadó, Budapest, 2000. (131–148.)
- Pappné dr. Ádám Györgyi (szerk.): Matematika az általános képzéshez a tanító szak számára. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2006.
- Pelle Béla (szerk.): Így tanítjuk a matematikát II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1978.
- Peller József: A matematikai ismeretszerzés gyökerei. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.
- Peller József: A matematikai ismeretszerzési folyamatról. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.
- Piaget, Jean: Az értelmi fejlődés szakaszai. In: Piaget, J.: Válogatott tanulmányok. Gondolat Kiadó, Budapest, 1970. (66–75.)
- Piaget, Jean, Inhelder, Bärbel: Gyermekek lélektan. Osiris Kiadó, Budapest, 1999.
- Piskalo, A. M.: Geometria az 1–4. osztályban. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- Pólya György: A gondolkodás iskolája. Gondolat Kiadó, Budapest, 1977.
- Pólya György: A problémamegoldás iskolája I. kötet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
- Radnainé Szendrei Julianna, Makara Ágnes, Mátyásné Kokovai Jolán, Pálffy Sándor: Tanulási nehézségek a matematikában. IFA–BTF–MKM, Budapest, 1994.
- Séra László, Kárpáti Andrea, Gulyás János: A térszemlélet. Comenius Bt. Pécs, 2002.
- Skemp, R. R.: A matematikatanulás pszichológiája. Gondolat Kiadó, Budapest, 1975.
- Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? Typotex Kiadó, Budapest, 2005.
- Sriraman, Bharath, English, Lyn D.: Combinatorial Mathematics: Research into Practice. In: Mathematics Teacher. Vol. 98, No. 3, 2004. (182–191.)
- Szerencsi Sándor, Papp Olga: A matematika tanítása II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- Tarcsi Margit: A hosszúság és terület fogalmának alakulása kisiskoláskorban (PhD-értekezés). Debreceni Egyetem, Debrecen, 2008.
- Török Tamás: A szövegértés és a matematikai feladatmegoldás összefüggései. Csengőszó, XII. évfolyam, 4. szám, 2004.
- Török Tamás: A természetes számfogalom bővítése (4. rész). Tanító, XXXIX. évfolyam, 8. szám, 2001.

- Török Tamás: Az egész számfogalom erősítése. Tanító, XXXIII. évfolyam, 10. szám, 2000.
- Török Tamás: Bővítés pozitív törtszámokkal Tanító, XXXIX. évfolyam, 9. szám, 2001.
- Török Tamás: Hőmérő-modell kartonból. Tanító, XXXVIII. évfolyam, 10. szám, 2000.
- Török Tamás: Mit tudhatunk meg? Tanító, XXXV. évfolyam, 1. szám, 1997.
- Vigotszkij, L. Sz.: Gondolkodás és beszéd. Trezor Kiadó, Budapest, 2000.
- Vilenkin, N. J. : Kombinatorika. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1971.

Pasi Sahlberg:

A finn példa

Mit tanulhat a világ a finnországi oktatási rendszer reformjából?

(Finnish Lessons, ford. Fazekas Dóra)

Raktári szám: 60170

Fogyasztói ár: 6900 Ft



A *Finn példa* első kézből származó átfogó leírása annak, hogy Finnország hogyan épített három évtized alatt világszínvonalú oktatási rendszert. **Pasi Sahlberg**, a finn oktatási és kulturális minisztériumban működő CIMO (Nemzetközi Mobilitási és Együttműködési Központ) főigazgatója végigköveti az oktatáspolitikai fejlődését az országban, és kiemeli, hogy miben különbözik a rendszer a legtöbb állam oktatásától. Megmutatja, hogy az északi országban az oktatási reform ahelyett, hogy a versenyre, kiválasztásra és a diákok külső felmérésére támaszkodott volna, a tanári munka szakmai tartalmának növelésére, az iskolák szakmai vezetésének fejlesztésére, valamint a tanárok és iskolák felé irányuló bizalom megerősítésére helyezte a hangsúlyt. Ez a könyv részletesen leírja az oktatási változások összetett természetét, és arra bátorítja a pedagógusokat és az oktatás irányítóit, hogy hatékony megoldásokat dolgozzanak ki saját körzetük és iskoláik számára.

„Pasi Sahlberggel 2011 novemberében találkoztam, Helsinkiben. Akkor nyomta kezembe az Egyesült Államokban frissen megjelent könyvét, a *Finnish Lessonst*¹, amely végre magyar fordításban is olvasható. A másfél évvel ezelőtti megbeszélést megelőző napokban már sok helyen megfordultunk²: találkoztunk a Finn Parlament Oktatási és kulturális bizottságának tagjaival, a Nemzetközi Oktatási Tanács főigazgatójával, a Finn Kutatási és Innovációs Tanács főtítkárával, az Oktatási és Kulturális Minisztérium Nemzetközi Kapcsolatok igazgatójával, meglátogattuk a Helsinki Egyetemet, jártunk óvodában, általános iskolában (azaz *peruskoulu*-ban) és szakközépiskolában is. A mi csoportunk is egyike volt annak a sok ezernek, amely az elmúlt években az északi országban járt, mert testközelből akarta látni a »finn oktatási csodát«, megismerni a PISA-kutatásokból kitűnő eredményesség, siker hátterét.

Sok mindenről esett szó a találkozókön, kezdve a finn oktatásirányítási rendszertől és a tanárképzés szerkezetétől a pedagógusok helyzetén és társadalmi megítélésén át az intézmények napi működési gyakorlatáig. Megvallom, sok esetben néztünk össze, kérdeztünk vissza, mert amit hallottunk, egy olyan oktatási rendszer képét vetítette elénk, amely az *általános*, bevett oktatásirányítási logikával szemlélve elvileg nem is működhetne. Márpedig a finn oktatás nemcsak hogy működik, de egyike a világ legeredményesebb, legkiválóbb közszolgálati rendszereinek...” (Részlet Pokorni Zoltánnak, az Országgyűlés Oktatási és tudományos bizottsága elnökének előszavából)

További információk a <http://www.ntk.hu/cikk/ntkshop/60170> oldalon érhetők el.

1 A könyv eredeti címe, a „Finn leckék” kétségtelenül furcsán hangzik magyarul, ugyanakkor jól kifejezi azt, ahogyan a finn oktatási rendszer átalakítása lépésről lépésre, újabb és újabb feladatok, leckék megoldásán át vezetett el a mostani eredményekhez. Egyúttal az eredeti cím utal arra is, hogy a könyv felvázolja azokat a fontos kérdéseket, döntési pontokat, amelyekre meg kell találniuk a helyes válaszokat azoknak az országoknak, amelyek a hasonló előrelépést, sikert szeretnék elérni saját oktatási rendszerük fejlesztésének eredményeként.

2 A szakmai úton az Országgyűlés Oktatási és tudományos bizottsága delegációjának vezetőjeként vettem részt más képviselőtársaimmal együtt.

Steklács János

**Olvasási stratégiák tanítása, tanulása
és az olvasásra vonatkozó meggyőződés**

Raktári száma: 41301

Ára: 3190 Ft



A szerző fő célja, hogy az olvasási stratégiákra vonatkozó kutatások összefoglaló bemutatásával kiemeljen néhány olyan fontos tényezőt, amelyek a magyar olvasástanítási rendszer tartalmát képezhetik. Elemzi az olvasáskutatás tendenciáit, különösképpen azokat az elemeket, amelyek hatékonyságát noha a szakirodalom igazolta, mégsem honosodtak meg hazánkban a jelentőségükhöz, a bennük rejlő lehetőségekhez képest.

A kötetben először az olvasás, olvasástanulás fogalmának, jellemzőinek átalakulását tekinti át, ezután az olvasás diszciplináris, tartalmi dimenziójának értelmezési lehetőségéről ír, majd az olvasási stratégiák és a metakogníció fogalmát, a szövegértő olvasási képesség fejlődésére gyakorolt hatását elemzi a külföldi és magyar szakirodalom segítségével.

Az empirikus kutatásokat ismertető fejezetben a szerző többek között részletesen bemutatja a Kecskeméten és környékén végzett olvasásstratégiai fejlesztő programot. Több más kutatási program között helyet kapott az ADORE kutatási projekt leírása is, amelyet 14 ország kutatóival közösen végeztek a Kecskeméti Főiskolán azzal a céllal, hogy feltárják az olvasási problémákkal küzdő tizenévesek nehézségeit.

A kötetben mind a gyakorló, mind a leendő pedagógusok számtalan jól hasznosítható gondolatot, módszertani elemet találhatnak.

www.ntk.hu/cikk/ntkshop/41301

Bárdos József – Galuska László Pál

Fejezetek a gyermekirodalomból

Raktári száma: 41302

Ára: 3990 Ft



A magyar gyermek- és ifjúsági irodalomnak olyan sok megválaszolatlan elméleti és gyakorlati kérdése van, hogy egyetlen kiadvány sem vállalkozhat arra, hogy a meglévő hiányokat mind pótolja. Ez a könyv is válogat a hatalmas anyagban, és bár változtatásban természetesen megjelenik a szerzők (nem feltétlenül érvényes) értékítélete, azért lényegében mégis a mai magyar gyermekirodalmi kánont igyekszik érvényesíteni. Újdonságnak tekinthető, hogy a gyermek- és ifjúsági irodalmat esztétikai érvényességű művészeti alkotások halmazának tekinti, és egyértelműen elválasztja a gyermekkönyvek egyéb (ismeretterjesztő, foglalkoztató stb.) fajtáitól. Ez utóbbiakkal a könyv nem is foglalkozik.

A szerzők nagymértékben támaszkodtak a már létező kutatási eredményekre, igyekeztek abból minél többet beépíteni munkájukba. Szándékuk az volt, hogy olyan alapvetést nyújtsanak, amely (akár felsőoktatási kurzusok keretében, akár egyéni érdeklődés alapján) az egyes területeken kiindulópontként szolgálhat.

A könyv lényegében kétféle fejezeteket tartalmaz. Egyrészt elméletibb, műfaji megközelítésű részeket (szó esik például a népköltészet és a gyermekirodalom kapcsolatáról, a meséről, meseregényről, a lányregényről, a világirodalom néhány klasszikus művéről), másrészt a magyar gyermek- és ifjúsági irodalom napjainkig tartó történetének vázlatos áttekintését nyújtja. A végén korcsoportokra bontott lista található az olvasásra ajánlható irodalmi alkotásokról.

A könyvet jó szívvel ajánljuk felsőoktatási használatra, de gyakorló tanároknak, tanítóknak, óvodapedagógusoknak is éppúgy, ahogyan a téma iránt érdeklődők széles rétegeinek is.

www.ntk.hu/cikk/ntkshop/41302

Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó Zrt.
www.ntk.hu
Vevőszolgálat: info@ntk.hu
Telefon: 06-80-200-788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató
Raktári szám: 41300
Felelős szerkesztő: Hernádi Katalin
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Műszaki szerkesztő: Kiss Tamás
Terjedelem: 31,28 (A/5) ív
Első kiadás, 2013

Prospektkop Nyomda
049/13